FORMULARIO – RISOLUZIONE ESERCIZI di **ELETTROTECNICA**

Pietro Giannoccaro

ATTENZIONE

Quello che segue è una sorta di "formulario" del corso di Elettrotecnica, presso la facoltà di Ingegneria Elettronica al Politecnico di Milano. Il documento si propone di raccogliere i metodi e le formule, nonché algoritmi, per risolvere gli esercizi del corso. NON garantisce tuttavia la presenza di tutte le formule necessarie, né la correttezza di queste. Si invitano pertanto i lettori a consultare il testo di riferimento.

Inoltre, non sostituisce in alcun modo lo studio dal libro.

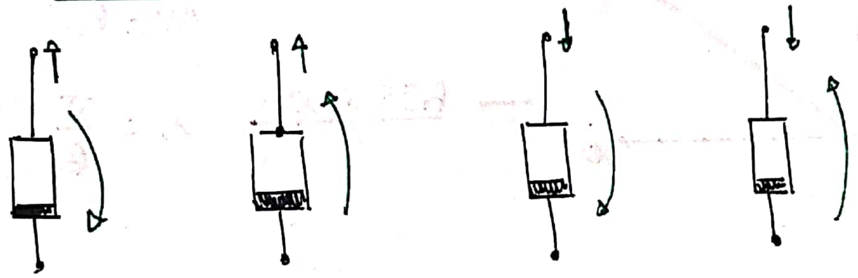
METODO DELLA CARATTERISTICA

Le **CARATTERISTICHE** di:

→ **BIPOLI IN SERIE**: si sommano graficamente le TENSIONI
(i costante) (per ogni retta ($\perp$) - CORRENTE sommi le TENSIONI)

→ **BIPOLI IN PARALLELO**: si sommano graficamente le CORRENTI
(per ogni retta ($\perp$) - TENSIONE sommi le CORRENTI)

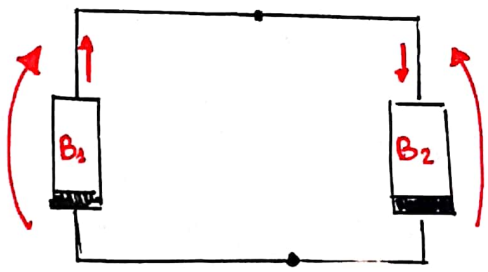
PER POTER SOMMARE LE CARATTERISTICHE DEI BIPOLI, QUESTI DEVONO AVERE LE STESSE CONVENZIONI!



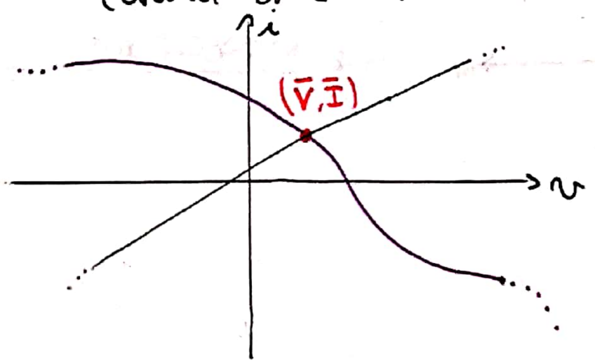
→ se INVERTO TENSIONE, RIBALTO la CARATTERISTICA rispetto all'ASSE DELLE CORRENTI

→ se INVERTO CORRENTE, RIBALTO rispetto ad ASSE TENSIONI.

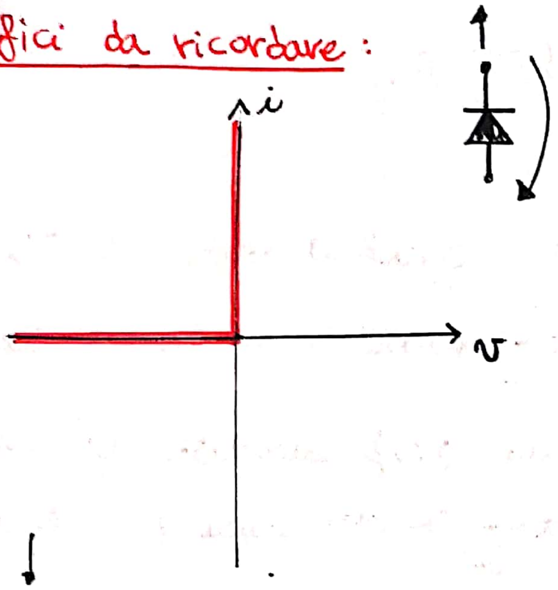
Per trovare le soluzioni di un circuito si devono intersecare GRAFICAMENTE le CARATTERISTICHE DEI DUE BIPOLI RISULTANTI, così convenzionati:



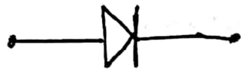
troviamo il PUNTO DI LAVORO del CIRCUITO che può essere utilizzato per calcolare POTENZE etc... (ormai si conosce il valore della tensione/corrente)

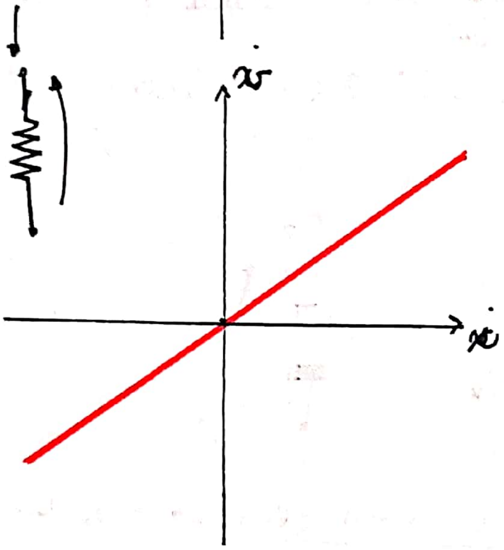


grafici da ricordare:



→ DIODO

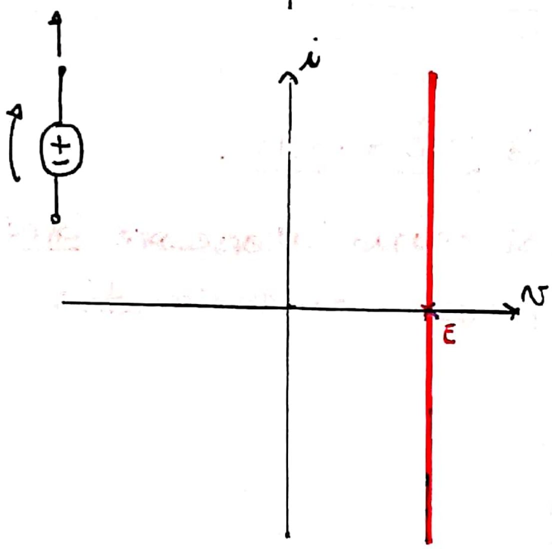




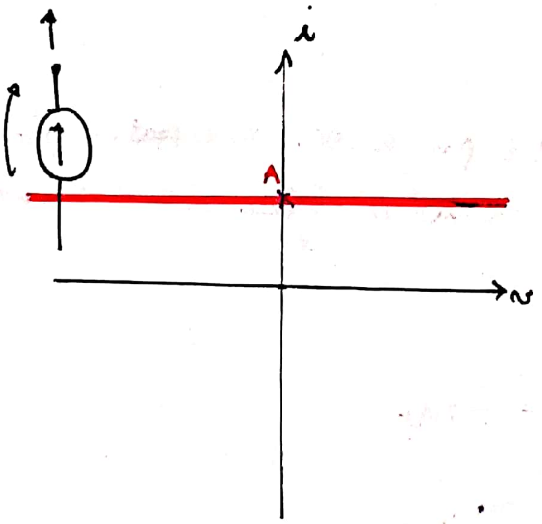
→ RESISTORE

$v = Ri$

$i = \frac{v}{R}$



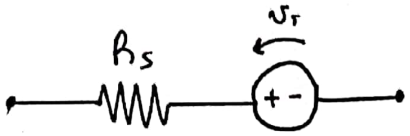
→ GENERATORE DI TENSIONE



→ GENERATORE DI CORRENTE

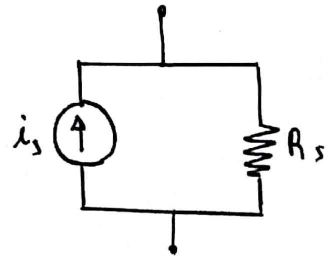
GENERATORI REALI

di TENSIONE:



R_s è la **RESISTENZA INTERNA**

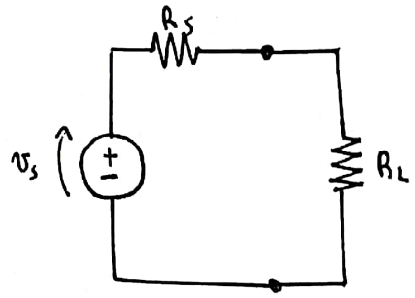
di CORRENTE:



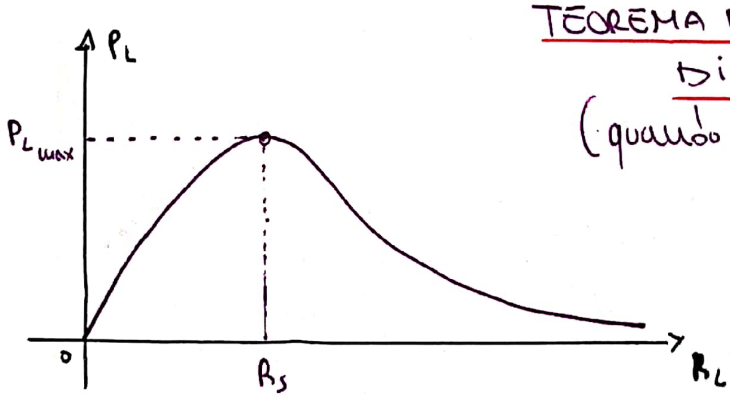
collegando ai morsetti del generatore reale di TENSIONE una RESISTENZA; possiamo calcolare tensione, corrente e potenza:

(LOAD)

$$\boxed{v_L = v_s \frac{R_L}{R_L + R_s} \qquad i_L = \frac{v_s}{R_L + R_s}}$$



$$\boxed{P_L = v_L i_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}} \longrightarrow \boxed{P_{L,max} = \frac{v_s^2}{4R_s}}$$ → POTENZA DISPONIBILE



TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

(quando $R_L = R_s$)

RENDIMENTO

$$\boxed{\eta = \frac{P_L}{P_L + P_s}}$$

POT. SUL RESISTORE

POTENZA SUL CARICO

POTENZA COMPLESSIVAMENTE DISSIPATA

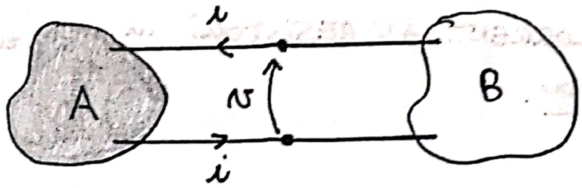
POTENZA SU RESISTENZA INTERNA

ottimi rendimenti per $R_L >> R_s$

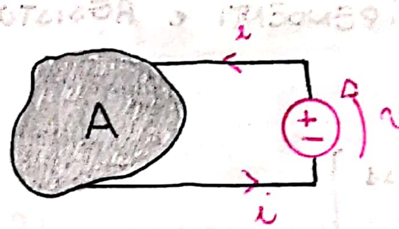
→ nel dettaglio:

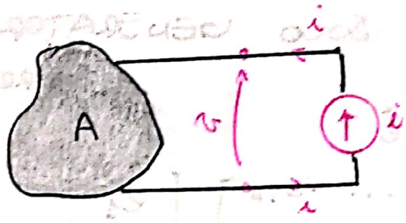
• PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE (esempio a PAG. 62)

Siano A e B due PARTI arbitrarie del CIRCUITO, collegate come in figura:



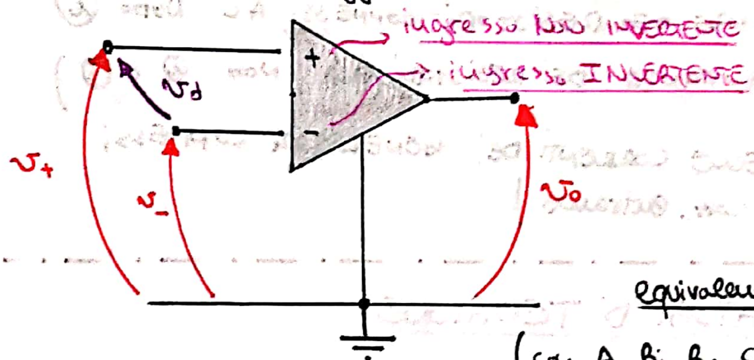
→ Allora, sostituendo B con un GENERATORE INDIPENDENTE di TENSIONE, di valore esattamente pari a v (o con un GENERATORE di CORRENTE di valore esattamente pari a i) TUTTE LE TENSIONI e TUTTE LE CORRENTI in A, rimangono INVARIATE.





• L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

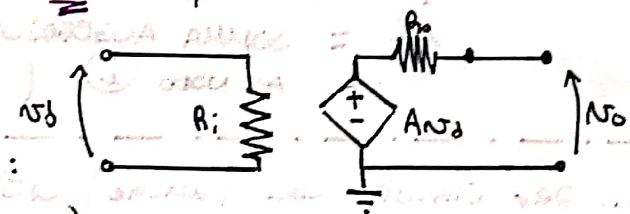
Consente di effettuare delle OPERAZIONI MATEMATICHE con i segnali.



TENSIONE DIFFERENZIALE

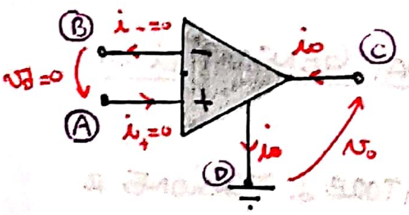
$$v_d = v_+ - v_-$$

equivalente a:



(con A, R_i, R_o costanti)

... AM. OP. IDEALE: • tipicamente $R_i \to +\infty$, dunque le correnti nei terminali d'ingresso dell'operazionale possono considerarsi nulle (tra i TERMINALI D'INGRESSO, c'è un CIRCUITO APERTO VIRTUALE)



• dato che $-\frac{V_{max}}{A} < v_d < \frac{V_{max}}{A}$ (REGIONE LINEARE)

e $A \to \infty$, $v_d \to 0$ (CORTO CIRCUITO VIRTUALE)

LA RELAZIONE TRA v_o e l'AM. OP.: $\boxed{v_d = 0 \qquad i_+ = i_- = 0}$

per trovare la TENSIONE in USCITA possiamo sfruttare una LKT a ABCDA (maglia esterna), oppure partire dalle condizioni IDEALI per ottenere delle RELAZIONI da sviluppare.

Si UTILIZZA PER ELIMINARE EFFETTI DI CARICO (RESISTENZE).

più avanti si potrà usare anche l'ANALISI NODALE

→ ANALISI NODALE (algoritmi e note)

... per CIRCUITI con RESISTORI e GENERATORI DI CORRENTE

1. scegliere NODO DI RIFERIMENTO
2. applicare LKC a tutti i NODI, TRANNE quello di RIFERIMENTO.
3. esprimere le CORRENTI dei RESISTORI in funzione delle TENSIONI DI NODO.

*NOTA:
I) in un NODO, sono connessi almeno 3 bipoli (simbolo "A TERRA" ⏚)
II) le TENSIONI DI NODO sono le tensioni tra i NODI e il NODO di RIFERIMENTO
III) scegliendo come riferimento il NODO a cui è connesso il maggior numero di RESISTORI si ha una semplificazione del sistema di equazioni.

Se ci sono SOLO GENERATORI INDIPENDENTI e RESISTORI [di CORRENTE]

il SISTEMA è:

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ \vdots & G_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ G_{N1} & G_{N2} & & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sN} \end{bmatrix}}$$

dove

G_{ii} = SOMMA DELLE CONDUTTANZE DEI RESISTORI CONNESSI AL NODO ⓘ

G_{ij} = − (SOMMA DELLE CONDUTTANZE DEI RESISTORI TRA i NODI ⓘ e ⓙ)

i_{s_i} = SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI DEI GENERATORI CONNESSI AL NODO ⓘ (>0 con. entranti)

... per CIRCUITI con (anche) GENERATORI DI TENSIONE

- ALGORITMO NORMALE: Si aggiungono i punti:
  - 3b) Le CORRENTI dei GENERATORI di TENSIONE sono INCOGNITE AGGIUNTIVE
  - 4) scrivere i VINCOLI IMPOSTI DAI GENERATORI DI TENSIONE.

* SUPERNODO: la LINEA CHIUSA che racchiude un GENERATORE di TENSIONE e i DUE NODI a cui è CONNESSO.

- ALGORITMO SEMPLIFICATO:
  1) scegliere NODO di RIFERIMENTO
  2) APPLICARE LKC ai SUPERNODI (dei GENERATORI DI TENS. non connessi al RIFERIMENTO) e ai NODI RIMANENTI TRANNE quelli connessi al RIFER. tramite GEN. di TENSIONE

3) Imporre CORRENTI NEI RESISTORI in funz. POTENZIALI DI NODO. AGGIUNGERE VINCOLI GEN di TENSIONE

.. per CIRCUITI con (anche) AMPLIFICATORI OPERAZIONALI IDEALI

rappresenta il METODO più ADATTO per l'ANALISI DI CIRCUITI con AMPL. OP. ID.
le NOVITÀ sono:

- la CORRENTE di USCITA i_o non può essere espressa in funzione delle TENSIONI di NODO, è una INCOGNITA AGGIUNTIVA.
- l'IPOTESI di CORTOCIRCUITO VIRTUALE impone il VINCOLO $v_a - v_b = 0$ che si aggiunge ai VINCOLI IMPOSTI dai GENERATORI DI TENSIONE.

ALGORITMO OP-AMP:

1) Scegliere NODO DI RIFERIMENTO
(conviene quello/i collegato/i a terra)

2) APPLICARE LKC ai SUPER-NODI e RIMANENTI tranne:
   - NODO DI RIFERIMENTO
   - NODI CONNESSI AL RIFERIMENTO tramite GEN. DI TENSIONE.
   - NODI CONNESSI DIRETTAMENTE CON L'USCITA DI UN AMPL. OP.

3) esprimere le CORRENTI nei RESISTORI in funzione delle TENSIONI DI NODO.

4) Aggiungere VINCOLI IMPOSTI DAI GENERATORI DI TENSIONE e AMP. OPERAZIONALI. → osserva quali morsetti sono collegati ai (+) e (−) dell'AMP. OP e ricorda che

$v_+ = v_- = v_{generica}$

* rimane inalterato con GENERATORI PILOTATI

→ LINEARITÀ

Un componente è detto LINEARE se le GRANDEZZE CHE LO CARATTERIZZANO rispettano una relazione del tipo:

$$\boxed{y = kx}$$

(es. $v = Ri$ per i RESISTORI.)

le principali conseguenze sono:

- qualunque TENSIONE o CORRENTE nel circuito ha lo STESSO ANDAMENTO TEMPORALE (ad esempio di un GENERATORE di tipo SINUSOIDALE)
- In un circuito RESISTIVO LINEARE privo di GENERATORI INDIPENDENTI OGNI GRANDEZZA È NULLA.

→ PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

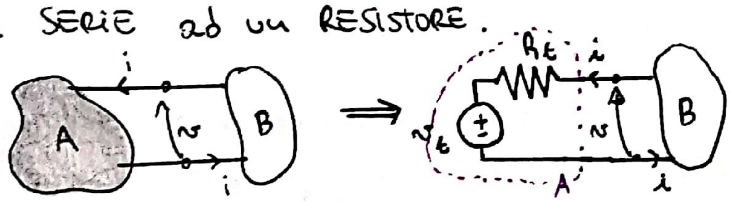
In un CIRCUITO RESISTIVO LINEARE, QUALUNQUE TENSIONE o CORRENTE è la SOMMA DEGLI EFFETTI DEI SINGOLI GENERATORI INDIPENDENTI, QUANDO AGISCONO UNA VOLTA.

nell'applicare tale principio:

- il GENERATORE DI TENSIONE sostituito da CORTO CIRCUITO
- il GENERATORE di CORRENTE sostituito da CIRCUITO APERTO
- GENERATORI PILOTATI di VARIO GENERE e RESISTORI, RIMANGONO INVARIATI.
- NON SI PUÒ APPLICARE PER LA POTENZA

→ TEOREMI DI THEVENIN e NORTON

THEVENIN: Un CIRCUITO RESISTIVO LINEARE, ACCESSIBILE DA DUE TERMINALI è equivalente ad un GENERATORE INDIPENDENTE di TENSIONE in SERIE ad un RESISTORE.



- v_T del GENERATORE è la TENSIONE CHE SI HA TRA I TERMINALI QUANDO SONO APERTI (TENSIONE A VUOTO).
- R_T del RESISTORE è la RESISTENZA EQUIVALENTE AL CIRCUITO CON i GENERATORI INDIPENDENTI SPENTI.

*NOTA: Il teorema di THEVENIN NON si può applicare se il BIPOLO A interagisce con il BIPOLO B per mezzo di elementi di accoppiamento. Inoltre non è applicabile se A è un GENERATORE INDIPENDENTE di CORRENTE (non sapremmo che valore dare di v_t!)

RTON: Un CIRCUITO RESISTIVO LINEARE, accessibile da tue terminali è EQUIVALENTE ad un GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE IN PARALLELO ad un RESISTORE.

- la CORRENTE i_N del generatore è la CORRENTE che scorre nei TERMINALI quando questi sono in CORTO-CIRCUITO
- la RESISTENZA R_N del RESISTORE è la RESISTENZA equivalente al CIRCUITO con i GENERATORI INDIPENDENTI SPENTI.

→ il circuito equivalente di THEVENIN è a sua volta equivalente a quello di NORTON se:

$$\boxed{R_N = R_T \qquad v_T = R_T i_N}$$

METODI PER DETERMINARE LA RESISTENZA EQUIVALENTE

I) "METODO SEMPLICE": applicabile se con GENERATORI INDIP. SPENTI ha una STRUTTURA SEMPLICE (per SERIE/PARALLELO RESISTORI)
[NO GEN. CONTROLLATI, AMP. OP]

II) METODO GENERATORE ARBITRARIO: si spengono GEN. INDIPENDENTI (no i controllati!) e si collega un GENERATORE di CORRENTE di valore ARBITRARIO i_0. poi si applica:

$$\boxed{R_T = \frac{v_x}{i_0}}$$

(oppure analogamente con GEN. di TENSIONE v_0)
[la corrente va da − a +]

III) CALCOLO SIMULTANEO: ricavare simultaneamente v_T e R_T, chiudendo il Bipolo di cui si vuole conoscere l'equivalente THEVENIN su un GENERATORE di CORRENTE ARBITRARIA i_0 RICAVANDO TENSIONE ai MORSETTI si ottiene:

$$\boxed{v_x = R_T i_0 + v_T}$$

IV) RAPPORTO v_T e i_N: si calcola sia TENSIONE a VUOTO che CORRENTE di CORTO CIRCUITO. poi:

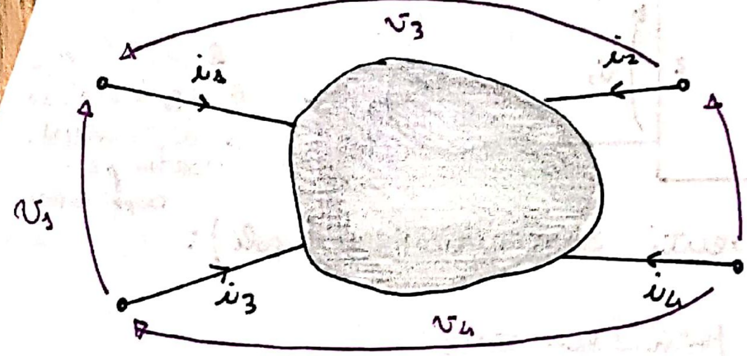
$$\boxed{R_T = \frac{v_T}{i_N}}$$

→ TENSIONE THEVENIN

→ corrente NORTON

DOPPI BIPOLI RESISTIVI:

da un QUADRIPOLO così strutturato:



per LKT, LKC:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

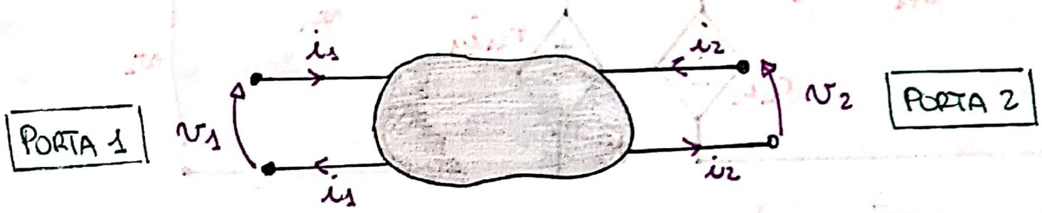
$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

(TRE CORRENTI, TRE TENSIONI INDIPENDENTI)

osserviamo ora una particolare condizione per cui il numero delle variabili diminuisce.

- **porta**: data una COPPIA DI TERMINALI, questa è detta PORTA se la CORRENTE CHE ENTRA DA UN TERMINALE è uguale a quella USCENTE dall'altro, in ogni istante.

- **DOPPIO BIPOLO**: un CIRCUITO ACCESSIBILE DA 4 TERMINALI, i quali formano DUE PORTE.



tipicamente se una PORTA è tale (sono verificate le condizioni) anche l'altra lo è (per LKC)

le VARIABILI DI INTERESSE sono 4, le due TENSIONI di PORTA e le DUE CORRENTI DI PORTA.

sono sufficienti DUE RELAZIONI CARATTERISTICHE, come in un TRIPOLO.
(alcuni esempi sono GENERATORE CONTROLLATO, o l'AMPL. OP. IDEALE)

→ rappresentazione dei doppi bipoli resistivi:

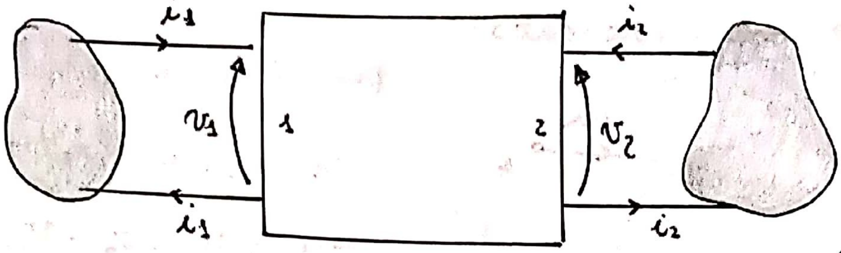
anche i DOPPI BIPOLI presentano una loro versione dei TEOREMI di THEVENIN e NORTON (applicandoli a ciascun bipolo di chiusura delle porte). si ottiene:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{T1} \\ v_{T2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \bar{R}\,\bar{i} + \bar{v}_T$$

dove v_{T1} e v_{T2} sono le TENSIONI A VUOTO delle due porte (quando sono aperte)
$\bar{R}$ è la MATRICE delle RESISTENZE.
Ovvero se il DOPPIO BIPOLO ha le PORTE CHIUSE su DUE BIPOLI, questi ultimi due si possono sostituire con due generatori di corrente.

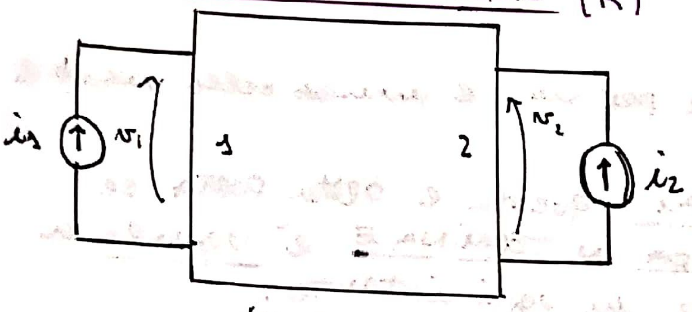
Dunque dato un doppio-bipolo con le porte chiuse su due bipoli:



è una sorta di applicazione di THEVENIN-NORTON per i Doppi Bipoli

allora possiamo effettuare le seguenti SOSTITUZIONI (ai bipoli):

I) DUE GENERATORI DI CORRENTE (R)



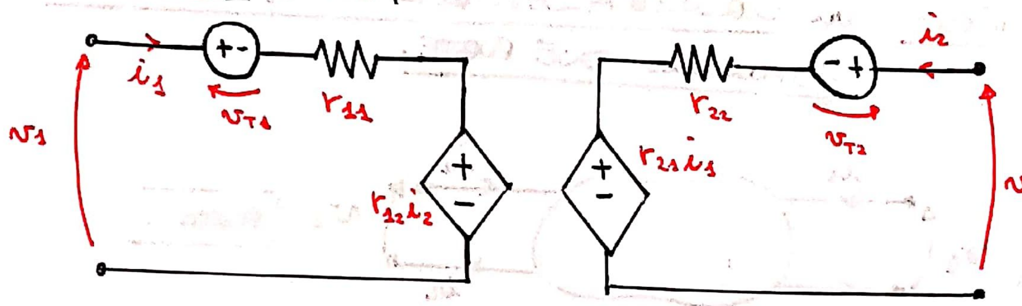
MATRICE RESISTENZE

$$\boxed{\bar{v} = \bar{R}\,\bar{i} + \bar{v}_T}$$

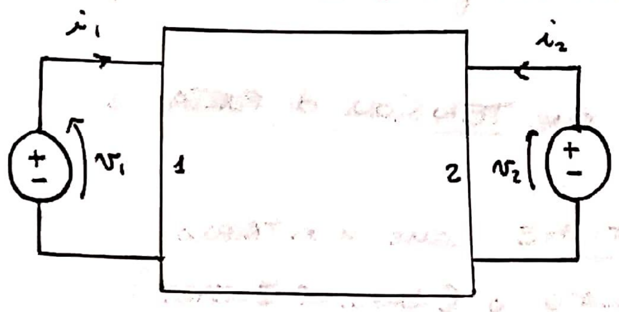
tensioni a vuoto (quando le porte sono aperte)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{T1} \\ v_{T2} \end{bmatrix}$$

il CIRCUITO EQUIVALENTE (tip. THEV/NORT) è dunque:



II) DUE GENERATORI DI TENSIONE (G)



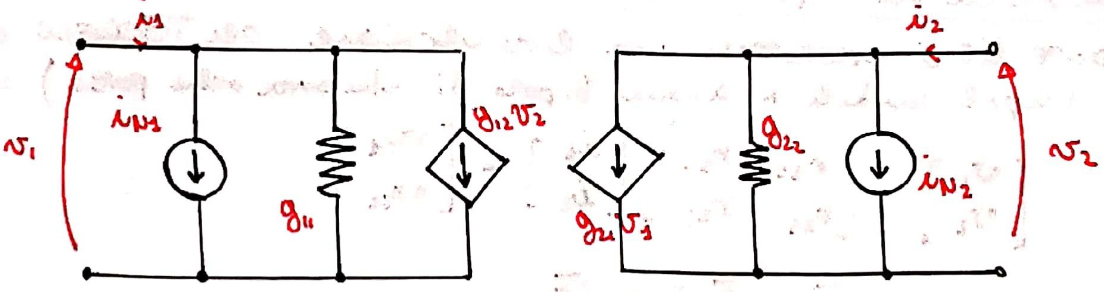
MATRICE CONDUTTANZE

$$\boxed{\bar{i} = \bar{G}\,\bar{v} + \bar{i}_N}$$

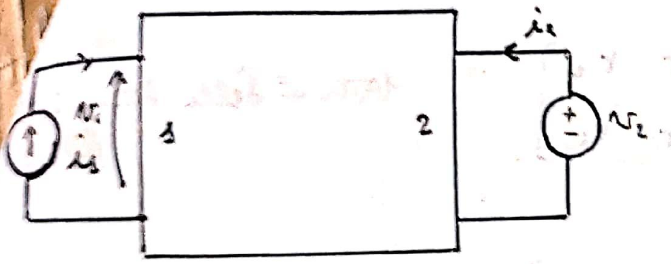
CORRENTI DI CORTO CIRCUITO

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{N1} \\ i_{N2} \end{bmatrix}$$

il CIRCUITO EQUIVALENTE è dunque:



... GENERATORE DI TENSIONE e UNO DI CORRENTE (H e H')

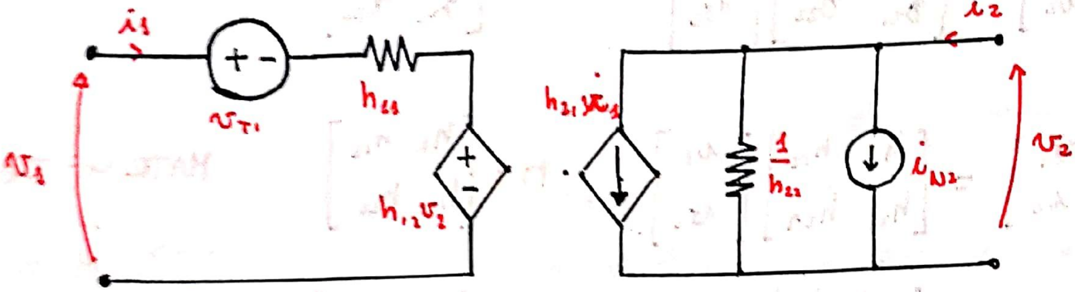


$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{T1} \\ i_{N2} \end{bmatrix}$$

↓

MATRICE IBRIDA

il CIRCUITO EQUIVALENTE è DUNQUE:



(invertendo tutto $1-2$ si ottiene CONFIG. H')

NOMENCLATURA

r sono RESISTENZE

g sono CONDUTTANZE

h possono essere sia RESISTENZE che CONDUTTANZE

⇒ x_{ii} "TIPO" in INGRESSO

x_{ij} "TIPO" in TRASFERIMENTO (se h, "RAPPORTO")

CALCOLO DEI PARAMETRI r, g, h

1.) si spengono GENERATORI INDIPENDENTI della RETE (interni al DOPPIO BIPOLO)

2) si applicano le formule, dove $i_x = 0$ implica CIRCUITO APERTO, $v_x = 0$ CORTO CIRCUITO:

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \qquad r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

ottenute dunque dallo sviluppo della formula matriciale, con generatori indipendenti interni spenti (v_T e i_N) e ponendo alternativamente $i_1 = 0$ e $i_2 = 0$ (per R).

per G, alternativamente $v_1 = 0$ e $v_2 = 0$

per H/H', " $v_1 = 0$ e $i_2 = 0$ e viceversa ($1 \leftrightarrow 2$)

LE RAPPRESENTAZIONI

I) $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ $\quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ MATRICE delle RESISTENZE

$\bar{R} = \bar{G}^{-1}$

II) $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ MATRICE delle CONDUTTANZE

III) $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\quad H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ MATRICE IBRIDA 1

$\Rightarrow \bar{H}' = \bar{H}^{-1}$

IV) $\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ $\quad H' = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$ MATRICE IBRIDA 2

ci sono poi altre due particolari configurazioni:

V) $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$ $\quad T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ MATRICE DI TRASMISSIONE DIRETTA

VI) $\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$ $\quad T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ MATRICE DI TRASMISSIONE INVERSA

Queste pongono GRANDEZZE in RELAZIONE tra loro. Possiamo distinguere tra VARIABILI DIPENDENTI e VARIABILI INDIPENDENTI.
Dalle VARIABI INDIPENDENTI possiamo dire se una RAPPRESENTAZIONE è CONTROLLATA in TENSIONE o in CORRENTE.

→ un DOPPIO BIPOLO NON possiede NECESSARIAMENTE TUTTE LE RAPPRESENTAZIONI
(ad esempi se il determinante di R è ZERO, G NON ESISTE)
H è ZERO, H' NON ESISTE

POTENZA DI UN DOPPIO BIPOLO

$$\boxed{p = v_1 i_1 + v_2 i_2}$$

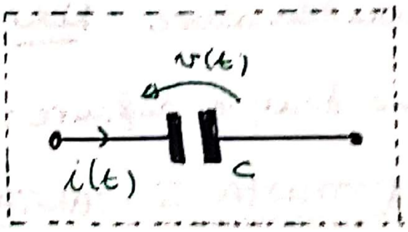
MATRICE INVERSA

$$A' = A^{-1} = \boxed{\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \text{matrice} \\ \text{cofattori} \end{bmatrix}^{\text{trasposta}}}$$

$\det A \neq 0$

ELEMENTI DINAMICI

→ CONDENSATORE



La sua RELAZIONE CARATTERISTICA è:

$$\boxed{i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}}$$

CAPACITÀ C del condensatore

$\left[\text{Farad } F = \frac{\text{Coulomb } C}{\text{Volt } V} \right]$

→ la CARICA che si accumula sulle armature di un condensatore è

$$q = \pm Cv$$

(prop. alla tensione)

la CAPACITÀ è:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

(A: area armature
d: distanza tra armature)

La sua RELAZIONE INVERSA è:

$$dv = \frac{1}{C} i dt$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(x)\,dx}$$

il CONDENSATORE è un ELEMENTO con MEMORIA, poiché la tensione allo istante t, non dipende solo dalla corrente in t, ma dall'andamento di essa tra t_0 e t e da $v(t_0)$.

→ le $\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$ sono:

1) QUANDO LA TENSIONE è COSTANTE, il CONDENSATORE equivale a un CIRCUITO APERTO.

2) la TENSIONE tra i MORSETTI di un CONDENSATORE è una FUNZIONE CONTINUA (matematicamente) [senza discontinuità]

$$v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+)$$

per ogni istante t_0

→ COMPORTAMENTO ENERGETICO

Il condensatore **NON** DISSIPA ENERGIA MA PUÒ IMMAGAZINARLA.

possiamo dunque definire:

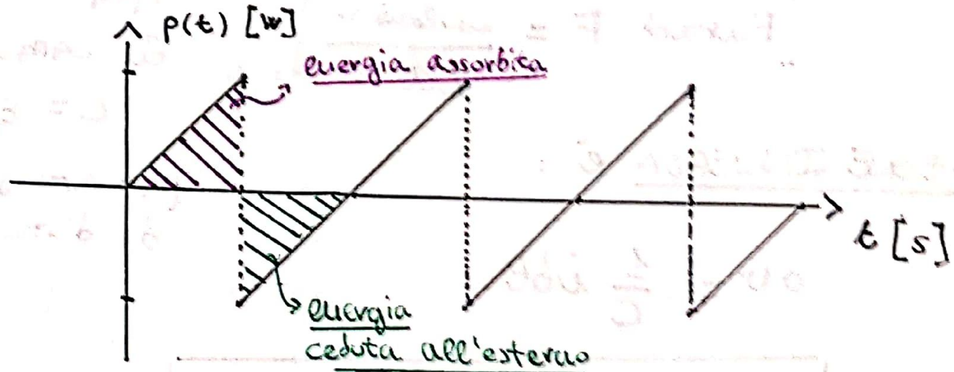
I) POTENZA ISTANTANEA

$$\boxed{p(t) = v(t) \cdot i(t)}$$

II) ENERGIA ASSORBITA

$$\boxed{w(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\,dt}$$

per una TENSIONE PERIODICA:



in un PERIODO, l'ENERGIA ASSORBITA BILANCIA quella CEDUTA.
NON C'È DISSIPAZIONE, il condensatore è SENZA PERDITE.

inoltre:

$$p(t) = v(t)\, i(t) = v(t) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$w(t_0, t_1) = \dots = C \int_{v(t_0)}^{v(t_1)} v\,dv = \frac{1}{2} C \left[v^2(t_1) - v^2(t_0) \right]$$

su un PERIODO o un multiplo di un PERIODO è nulla

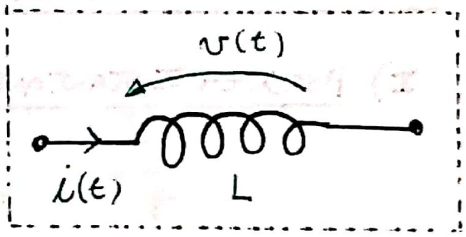
$$\boxed{w(v) = \frac{1}{2} C v^2}$$

la POTENZA MEDIA sul PERIODO è NULLA:

$$\boxed{P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt} = \frac{C}{2T} \left[v^2(t_0+T) - v^2(t_0) \right] = 0$$

→ INDUTTORE

La sua RELAZIONE CARATTERISTICA è:



$$\boxed{v(t) = L \frac{di(t)}{dt}}$$

INDUTTANZA L dell'Induttore

[Henry $H = \frac{\text{volt} \cdot \text{secondo}}{\text{ampère}}$]

sono ottenuti avvolgendo un conduttore lineare filiforme attorno ad un nucleo fino a formare numerose spire;
si genera attraverso l'avvolgimento un FLUSSO MAGNETICO Φ

$$\Phi = L i$$

e per la Legge di Faraday:

$$v = \frac{d\Phi}{dt}$$

dunque l'INDUTTANZA L è data da:

$$\boxed{L = \mu \frac{N^2 A}{\ell}}$$

NUMERO di SPIRE

AREA sezione trasversale

LUNGHEZZA (per induttori toroidali è la lunghezza della circonferenza mediana)

permeabilità magnetica del nucleo

la RELAZIONE INVERSA:

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

$$\boxed{i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(x)\, dx}$$

anche l'INDUTTORE è un ELEMENTO con MEMORIA.
* vedi condensatore!

→ le PROPRIETÀ sono:

1) QUANDO la CORRENTE è COSTANTE, l'INDUTTORE equivale ad un CORTO CIRCUITO

2) La CORRENTE nell'INDUTTORE è una FUNZIONE (matematicamente) CONTINUA

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+)$$ → per ogni istante t_0

→ COMPORTAMENTO ENERGETICO

I) POTENZA ISTANTANEA

$$\boxed{p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \frac{di}{dt} i(t)}$$

II) ENERGIA ASSORBITA

$$\boxed{w(t_0, t_1)} = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = L \int_{t_0}^{t_1} i \frac{di}{dt} dt = \boxed{L \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} i\, di}$$

$$\boxed{w(t_0, t_1) = \frac{1}{2} L \left[i^2(t_1) - i^2(t_0) \right]}$$

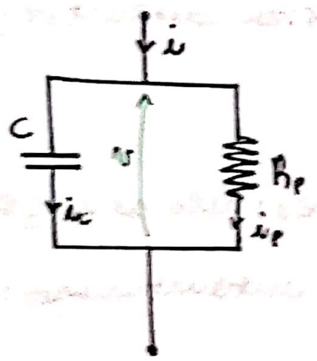
l'INDUTTORE è un ELEMENTO PASSIVO SENZA PERDITE.

$$\boxed{w(i) = \frac{1}{2} L i^2}$$ ENERGIA IMMAGAZZINATA

→ CONDENSATORI e INDUTTORI in SERIE/PARALLELO

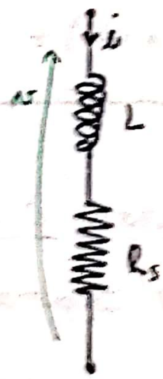
- CONDENSATORI
  - SERIE $\boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}}$
  - PARALLELO $\boxed{C_p = \sum_{k=1}^{N} C_k}$
- INDUTTORI
  - SERIE $\boxed{L_s = \sum_{k=1}^{N} L_k}$
  - PARALLELO $\boxed{\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}}$

→ CONDENSATORI e INDUTTORI REALI



CONDENSATORE REALE

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_p}$$

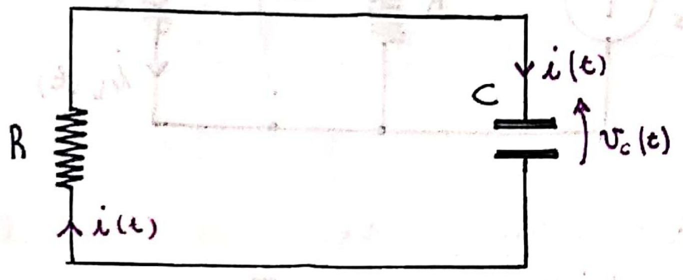


INDUTTORE REALE

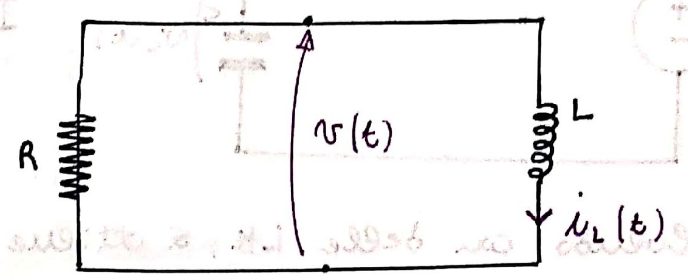
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R_s i(t)$$

CIRCUITI DEL I ORDINE

→ CIRCUITI IN EVOLUZIONE LIBERA (NO generatori indipendenti)



CIRCUITO RC



CIRCUITO RL

Supponiamo noti il CONDENSATORE CARICO (RC) o l'INDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE (RL) all'ISTANTE INIZIALE $t_0 = 0$.

Supponiamo noti $v_c(0) \neq 0$ (RC) opp. $i_L(0) \neq 0$, per ricavare $v_c(t)$ o $i_L(t)$ applicando le LK otteniamo:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_c(t) = 0 \quad \text{opp.} \quad \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L(t) = 0$$

con

CIRCUITO RC: $\boxed{\tau = RC}$ → COSTANTE DI TEMPO DEL CIRCUITO ← CIRCUITO RL: $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$

entrambe sono EQUAZIONI DIFFERENZIALI del tipo:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = 0}$$ → EQUAZIONE DIFFERENZIALE del PRIMO ORDINE OMOGENEA

che ha SOLUZIONE:

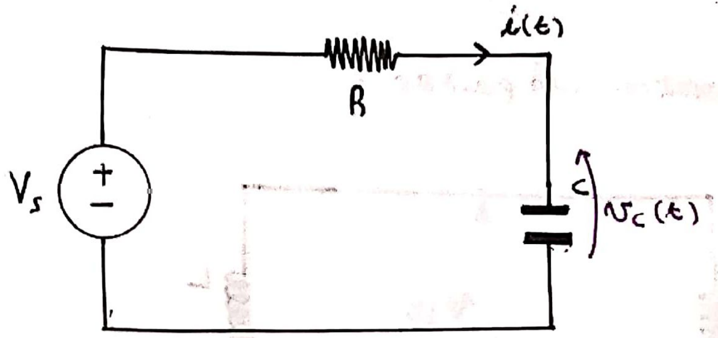
$$\boxed{x(t) = x(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

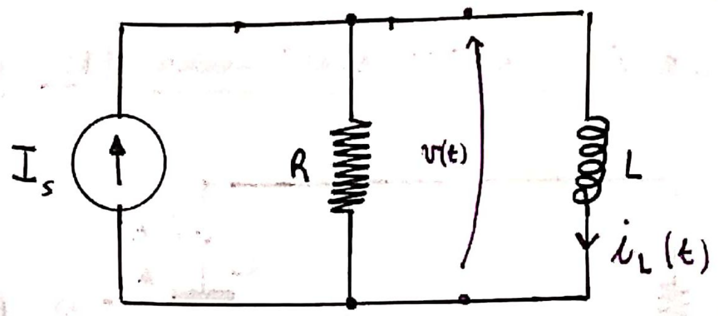
$x(0)$: CONDIZIONE INIZIALE

→ In ogni INTERVALLO PARI ad una COSTANTE di TEMPO τ il VALORE DELLA RISPOSTA $x(t)$ si RIDUCE di un fattore $1/e \simeq 0,37$

→ la RISPOSTA DEI CIRCUITI RC, RL ha una DURATA di 5τ

→ CIRCUITI RC e RL con un GENERATORE COSTANTE





risolvendo con delle LK, si ottiene:

$$\frac{d v_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C(t) = \frac{V_s}{\tau} \quad \text{oppure} \quad \frac{d i_L(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L(t) = \frac{I_s}{\tau}$$

ovvero si ottengono ancora delle EQUAZIONI DIFFERENZIALI del PRIMO ORDINE non più OMOGENEE, del tipo:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{x_p}{\tau}}$$

risolvendo:

$$x(t) = [x(0) - x_p] e^{-\frac{t}{\tau}} + x_p$$

con

$$\tau = RC \quad \text{opp.} \quad \tau = L/R$$

in modo generale:

$$\boxed{x(t) = [\underbrace{x(0)}_{\text{VALORE INIZIALE}} - \underbrace{x(\infty)}_{\text{VALORE FINALE}}] e^{-t/\tau} + \underbrace{x(\infty)}_{\text{VALORE FINALE}}}$$

→ VALORI INIZIALI e FINALI $[x(0) \; ; \; x(\infty)]$

(si studiano i CIRCUITI EQUIVALENTI in REGIME COSTANTE)

A REGIME $(t \to \infty)$:

I) la TENSIONE $v_C(t)$ del CONDENSATORE diventa COSTANTE, dunque il CONDENSATORE si COMPORTA COME UN CIRCUITO APERTO

II) la CORRENTE $i_L(t)$ dell'INDUTTORE diventa COSTANTE, dunque l'INDUTTORE si comporta come un CORTO CIRCUITO

→ Sostituendo il CONDENSATORE (INDUTTORE) con un CIRCUITO APERTO (CORTO CIRCUITO) possiamo calcolare $v_C(\infty)$ $(i_L(\infty))$.

→ Sfruttando le PROPRIETÀ di CONTINUITÀ di v_C e i_L possiamo calcolare anche le COND. INIZIALI

CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE AUTONOMI

Per studiare circuiti RC o RL più complessi, bisogna semplicemente applicare i TEOREMI di:

→ **THEVENIN** (per circuiti RC)

→ **NORTON** (per circuiti RL)

ai morsetti del CONDENSATORE / INDUTTORE.

→ GRANDEZZE DIFFERENTI DA v_C o i_L

Vale la seguente, importante, PROPRIETÀ:

in un circuito autonomo del primo ordine, con $R_{eq} > 0$, qualunque TENSIONE o CORRENTE $x(t)$, per $t > 0$ ha l'espressione:

$$\boxed{x(t) = \left[x(0^+) - x(\infty)\right] e^{-t/\tau} + x(\infty)}$$

dove

$$\boxed{\tau = R_{eq} C} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\tau = L / R_{eq}}$$

METODO SISTEMATICO

CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE AUTONOMI: METODO SISTEMATICO PER RICAVARE UNA GRANDEZZA $x(t)$ per $t>0$:

1

RICAVARE $v_C(0)$ o $i_L(0)$

da CIRCUITO A REGIME

Con le OPPORTUNE SOSTITUZIONI

COND: CIRCUITO APERTO

IND: CORTO CIRCUITO

[PROPR. di CONTINUITÀ]

↓ ↓ ↓

NEL CIRCUITO ALL'ISTANTE $t=0^+$ SOSTITUIRE CON GENERATORE INDIPENDENTE DI VALORE

$v_C(0)$ opp. $i_L(0)$

il COMPONENTE DINAMICO, e RICAVARE

$x(0^+)$

2

↓ ↓ ↓

3

TROVARE NEL CIRCUITO A REGIME $t \to +\infty$

$x(\infty)$

↓ ↓ ↓

DETERMINARE LA RESISTENZA EQUIVALENTE

R_{eq}

VISTA DAL COMPONENTE DINAMICO

4

↓ ↓ ↓

UTILIZZARE LA FORMULA

$$\boxed{x(t) = [x(0^+) - x(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)}$$

sostituendo

$x(0^+)$

$x(\infty)$

$\tau = R_{eq}C$ opp. $\tau = L/R_{eq}$

5

SOVRAPPOSIZIONE NEI CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE

Anche nei CIRCUITI DINAMICI LINEARI vale ancora il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, seppur con qualche precisazione:

> una generica grandezza $x(t)$ si può ottenere sommando il CONTRIBUTO della CONDIZIONE INIZIALE con i GENERATORI SPENTI, e i CONTRIBUTI dei SINGOLI GENERATORI INDIPENDENTI calcolati con la CONDIZIONE INIZIALE NULLA
>
> $[\, v_C(0) = 0 \quad \text{oppure} \quad i_L(0) = 0 \,]$

→ STABILITÀ, RISPOSTA TRANSITORIA e RISPOSTA PERMANENTE

• I circuiti con $\boxed{R_{eq} > 0}$ sono STABILI.

in un circuito stabile possiamo suddividere la RISPOSTA (soluzione) in:

$$x(t) = \underbrace{\boxed{[x(0) - x(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}}}}_{\text{RISPOSTA TRANSITORIA}} + \underbrace{\boxed{x(\infty)}}_{\text{RISPOSTA PERMANENTE}}$$

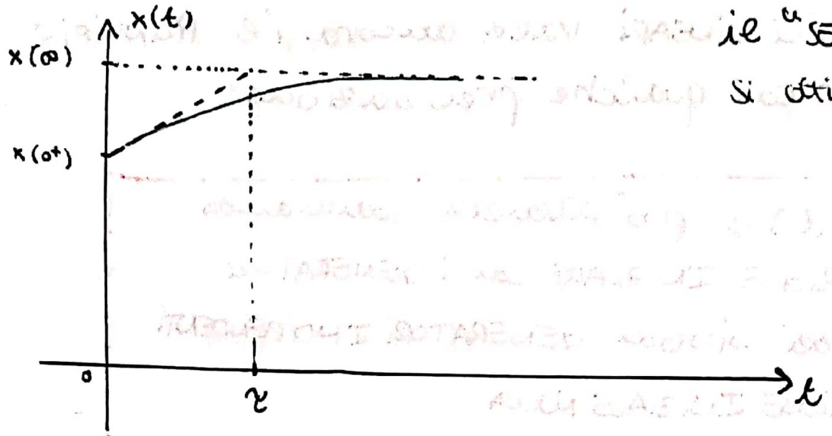
la RISPOSTA TRANSITORIA scompare con il passare del tempo
($\longrightarrow 0$ per $t \to \infty$)

la RISPOSTA PERMANENTE coincide con il VALORE FINALE
($x(t) \to x(\infty)$ per $t \to +\infty$)

*NOTA: la FORMA D'ONDA della RISPOSTA PERMANENTE è imposta dai GENERATORI INDIPENDENTI.

• I circuiti con $\boxed{R_{eq} < 0}$ sono INSTABILI.
(l'esponenziale diventa positivo e diverge a $+\infty$)
Perde senso la SCOMPOSIZIONE DELLA RISPOSTA e il concetto di REGIME COSTANTE

→ DISEGNARE GRAFICO



il "segmento" richiesto ("tangente") si ottiene unendo i punti

$$\boxed{\begin{array}{l} A\ (0,\ x(0^+)) \\ B\ (\tau,\ x(\infty)) \end{array}}$$

→ CIRCUITI CON GENERATORI COSTANTI A TRATTI

Si sostituisce nelle formule t con $t - t_0$ (fin ora abbiamo supposto $t_0 = 0$)

$$\boxed{t \rightarrow t - t_0}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

→ 1° ORDINE

→ A VARIABILI SEPARABILI $\boxed{y' = h(x)\,k(y)}$

si integra $\dfrac{y'}{k(y)} = h(x)$

→ LINEARI $\boxed{y' + a(x)\,y = b(x)}$

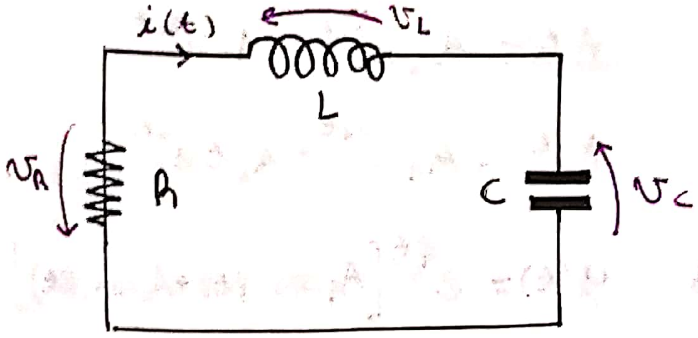
$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)}\left[\int b(x)\,e^{A(x)}\,dx + c\right]}$$

INTEGRALE GENERALE

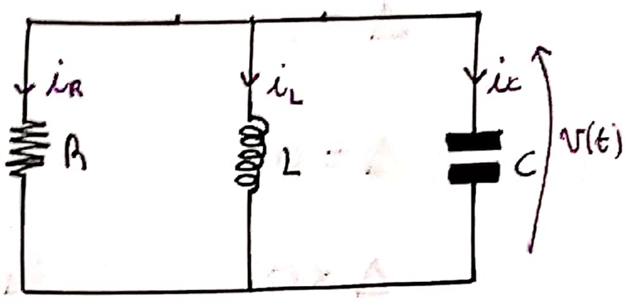
PRIMITIVA di $a(x)$

CIRCUITI DEL II ORDINE

→ CIRCUITI IN EVOLUZIONE LIBERA



CIRCUITO RLC-SERIE



CIRCUITO RLC-PARALLELO

Applicando la LKT al RLC-SERIE o la LKC al RLC-PARALLELO, scrivendo in funzione della variabile "costante" (per le LK) e derivando, si ottiene che il sistema circuitale è descritto da un'equazione differenziale del tipo:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

dove

RLC-SERIE

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

α : COSTANTE DI SMORZAMENTO $[s^{-1}]$

ω_0 : PULSAZIONE DI RISONANZA $\left[\frac{rad}{s}\right]$

RLC-PARALLELO

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

che comporta la RISOLUZIONE di un'equazione differenziale del II ordine. Sia l'equazione caratteristica:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

le soluzioni prendono il nome di FREQUENZE NATURALI:

$$\boxed{s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \qquad \boxed{s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

In base ai valori di α e ω_0 potremo distinguere diversi casi con diverse soluzioni.

SOLUZIONI DELLA EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA

→ RIPASSO EQ. DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

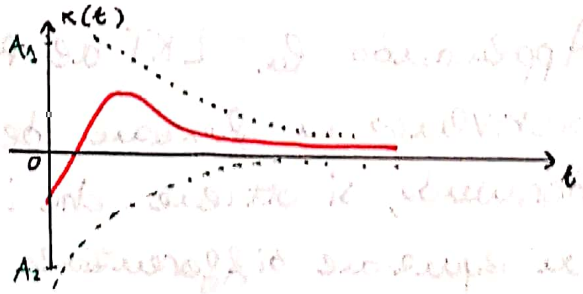
		Integrale generale
$\Delta > 0$	$s_1 \neq s_2$	$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$
$\Delta = 0$	$s_1 = s_2$	$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 t e^{st}$
$\Delta < 0$	$s_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left[A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)\right]$

→ LE SOLUZIONI

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

1) CIRCUITO SOVRASMORZATO $\boxed{\alpha > \omega_0}$

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

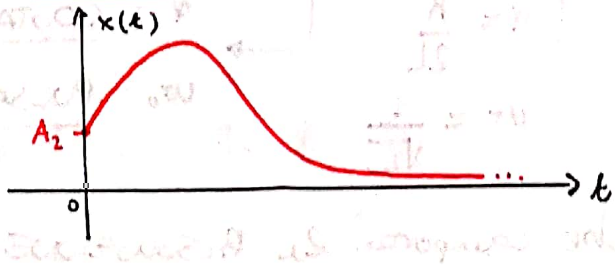


- non si può parlare di costanti di tempo (ricorda che $e^{t/\tau}$, τ è la cost. di tempo)
- al crescere di α la risposta è dominata dal primo esponenziale e tende a zero sempre più lentamente.

2) CIRCUITO CON SMORZAMENTO CRITICO $\boxed{\alpha = \omega_0}$

questo implica $s_1 = s_2$ $(\Delta = 0)$

$$\boxed{x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\alpha t}}$$



- c'è un massimo in $t = \frac{1}{\alpha} - \frac{A_2}{A_1}$
- il valore iniziale è A_2 $(t=0)$

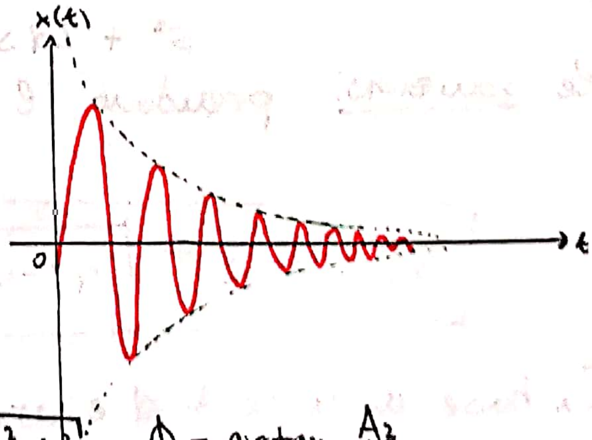
3) CIRCUITO SOTTOSMORZATO $\boxed{\alpha < \omega_0}$

le soluzioni sono $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

con $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)\right]}$$

$$= \boxed{A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \phi)} \qquad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \phi = -\arctan \frac{A_2}{A_1}$$

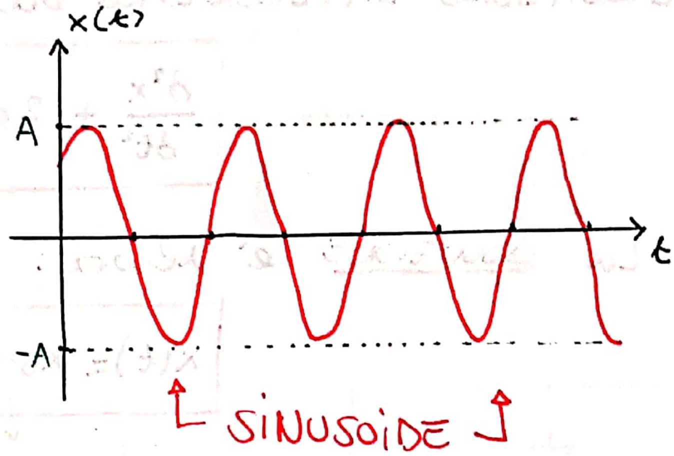


) CIRCUITO SENZA SMORZAMENTO $\boxed{\alpha = 0}$

le FREQUENZE NATURALI sono $s_{1,2} = \pm j\omega_0$

la soluzione è:

$$\boxed{x(t) = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t}$$



*NOTA: nel circuito SERIE $\alpha = 0 \rightarrow R = 0$
nel circuito PARALLELO $\alpha = 0 \rightarrow R = \infty$
che ci fa pervenire ad un circuito LC
che è SENZA PERDITE
(visto anche il GRAFICO)

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)}$$

→ CALCOLO DELLE COSTANTI A_1 e A_2 e CONDIZIONI INIZIALI

• Supponendo di conoscere $x(0)$ e $\frac{dx}{dt}(0)$ $[x'(0)]$, bisogna imporle alle equazioni, ovvero la soluzione e la sua derivata (è un PROBLEMA DI CAUCHY)

→ $x(0)$ e $x'(0)$ sono le CONDIZIONI INIZIALI.
Tipicamente il movimento di un ~~induttore~~ interruttore impone la tensione o la corrente nulla, da cui otteniamo $x(0)$.
Sfruttando poi le LK e le relazioni CARATTERISTICHE dell'INDUTTORE o CONDENSATORE possiamo ottenere $x'(t)$.

→ CIRCUITI CON GENERATORI e CIRCUITI GENERICI, STABILITÀ

L'aggiunta di un generatore non fa altro che rendere la EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SISTEMA NON OMOGENEA:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = y(t)}$$

La SOLUZIONE è allora:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{x_0(t)}_{\text{SOLUZIONE dell'OMOGENEA}} + x_p(t)}$$

$x_p(t)$ → SOLUZIONE PARTICOLARE → si trova con METODO SOMIGLIANZA

Il circuito è STABILE se

$$\boxed{\alpha > 0 \quad \omega_0^2 > 0}$$

* i CIRCUITI PASSIVI sono sempre STABILI

Se è STABILE:

I) $x_0(t)$ è la RISPOSTA TRANSITORIA $\quad x_0(t) \to 0$ per $t \to \infty$

II) $x_p(t)$ è la RISPOSTA PERMANENTE

per CIRCUITI più GENERALI, basta applicare i TEOREMI DI THEVENIN e NORTON e RICONDURSI a un RLC SERIE o RLC PARALLELO.

→ CIRCUITI AUTONOMI (GENERATORI INDIPENDENTI COSTANTI)

Se i generatori indipendenti sono costanti, $y(t)$ è una costante e dunque anche $x_p(t)$ è una costante. Si verifica:

$$\boxed{x(t) \to x_p \text{ per } t \to \infty}$$

per $t \to +\infty$ $\quad$ CONDENSATORI → CIRCUITI APERTI; INDUTTORI → CORTO CIRCUITI $\}$ a REGIME

dunque x_p si può trovare analizzando il circuito a REGIME.

→ ORDINE DI UN CIRCUITO: si ricava per ISPEZIONE VISIVA (ordine m)

$$\boxed{m = m_D - m_C - m_L}$$

dove

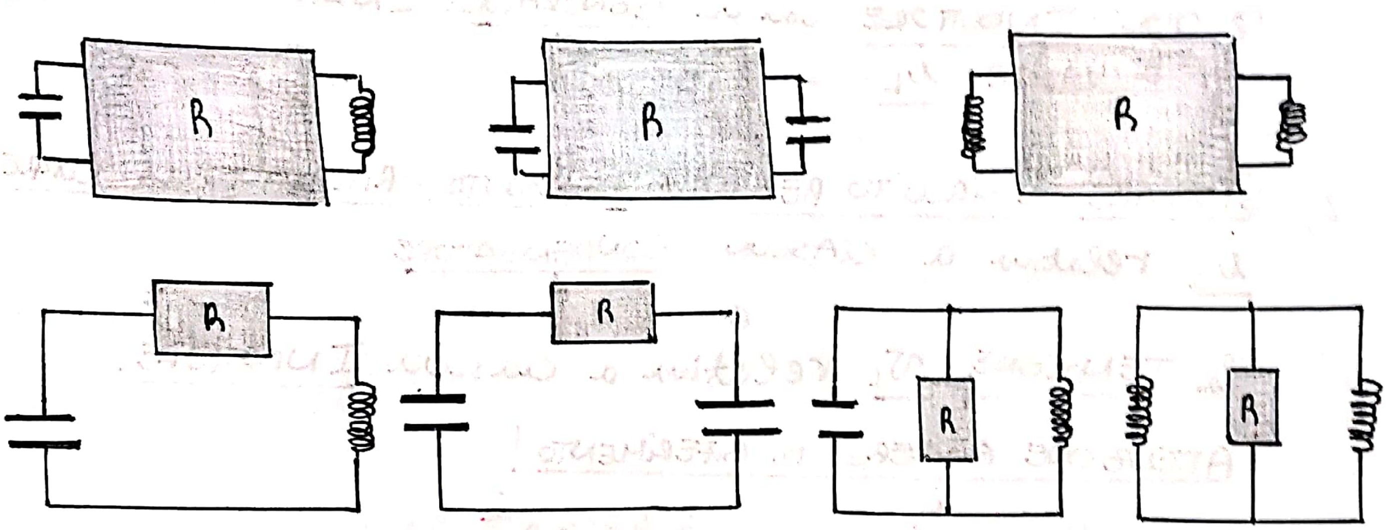
m_D: NUMERO DI ELEMENTI DINAMICI

m_C: NUMERO DI PERCORSI CHE ATTRAVERSANO SOLO CONDENSATORI ed eventualmente GEN. DI TENSIONE

m_L: " " " SOLO INDUTTORI ed eventualmente GEN. DI CORRENTE.

METODO DELLE EQUAZIONI DI STATO

Non tutte le configurazioni sono riconducibili tramite THEVENIN e NORTON a CIRCUITI RLC - SERIE o RLC - PARALLELO.
Questo vale solo per le seguenti configurazioni:



dove R indica una RETE RESISTIVA.

→ Possiamo allora applicare anche per i circuiti del II ordine la ANALISI NODALE, con le stesse linee guida utilizzate per i circuiti resistivi, e da cui possiamo ottenere delle EQUAZIONI DI TIPO INTEGRO - DIFFERENZIALE.

→ oppure, possiamo utilizzare il METODO DELLE EQUAZIONI DI STATO. In forma normale sono:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u_2 \end{aligned}}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE ACCOPPIATE.

↓

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}}_{[\dot{x}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{[u]}} \longrightarrow \text{STABILE per } \boxed{\begin{matrix} T < 0 \\ \Delta > 0 \end{matrix}}$$

[x] VETTORE DI STATO

[A] MATRICE DI STATO

[u] VETTORE DI STATO

T: TRACCIA [A]

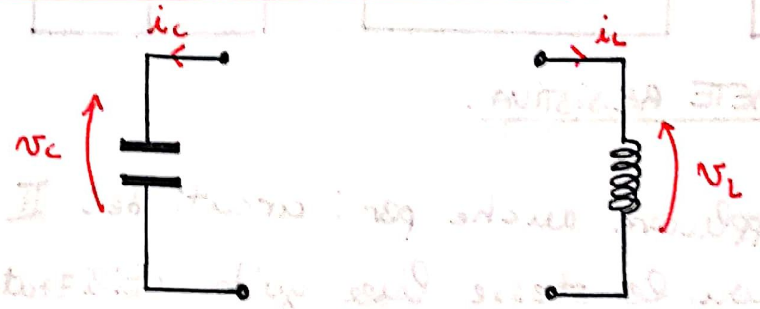
Δ: DETERMINANTE [A]

ALGORITMO PER SCRIVERE EQUAZIONI DI STATO DI CIRCUITI DEL 2° ORDINE

1) SOSTITUIRE OGNI CONDENSATORE con un GENERATORE DI TENSIONE di VALORE v_C (INDIPENDENTE)
e OGNI INDUTTORE con un GENERATORE INDIPENDENTE di CORRENTE di VALORE i_L

2) STUDIARE IL CIRCUITO RESISTIVO OTTENUTO, RICAVANDO LA CORRENTE i_C relativa a ciascun CONDENSATORE
e
la TENSIONE v_L relativa a ciascun INDUTTORE.

ATTENZIONE AI VERSI DI RIFERIMENTO!



3) SOSTITUIRE LE ESPRESSIONI OTTENUTE NELLE RELAZIONI:

$$\boxed{\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C} \qquad \boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L}$$

4) Calcolando TRACCIA E DETERMINANTE, troviamo α e ω_0 (per sistemi non RLC-SERIE-PARALLELO) e si procede con calcolo condizioni iniziali etc.

--- LA SOLUZIONE ---

Derivando ancora la PRIMA EQUAZIONE (se $a_{12} \neq 0$) o la SECONDA (se $a_{21} \neq 0$) e SOSTITUENDO si ottiene l'EQUAZIONE DEL SISTEMA DINAMICO:

$$\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2} - T\frac{dx_1}{dt} + \Delta x_1 = y_1}$$

(caso $a_{12} \neq 0$) abbiamo derivato la prima equazione

con

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{du_1}{dt} + a_{12}u_2 - a_{22}u_1 \\ T &= a_{11} + a_{22} \quad \text{(TRACCIA)} \sim [A] \\ \Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{(DETERMINANTE)} \end{aligned}}$$

se $a_{12} = a_{21} = 0$ equazioni di stato sono indipendenti. Circuito equivale a DUE circuiti del 1° ORDINE

→ a_{12}, a_{22} dell'altra COLONNA (2ª)
per y_2 si scambiano u_1 con u_2 e 1ª colonna

• se l'incognita è la TENSIONE al CONDENSATORE o la CORRENTE ALL'INDUTTORE POSSIAMO RICONDURCI ALL'EQUAZIONE STANDARD, con le TRASFORMAZIONI:

$$\boxed{\alpha = -\frac{T}{2}} \qquad \boxed{\omega_0^2 = \Delta}$$

NUMERI COMPLESSI

Definiamo <u>NUMERO COMPLESSO</u>:

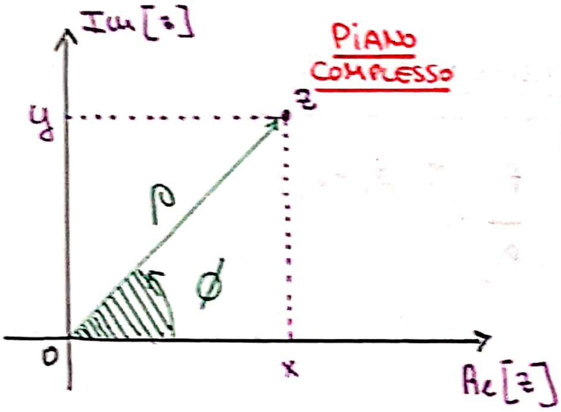
$$\boxed{z = \underbrace{x}_{\text{PARTE REALE}} + \underbrace{j}_{\text{UNITÀ IMMAGINARIA}} \underbrace{y}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}}$$

PARTE IMMAGINARIA $y = Im[z]$

PARTE REALE $x = Re[z]$

<u>UNITÀ IMMAGINARIA</u> $j^2 = -1$

possono essere visualizzate su un PIANO, con <u>ASSE REALE</u> e <u>IMMAGINA-RIO</u>, attraverso un passaggio in coordinate polari.



$$\boxed{z = \rho \angle \phi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} = |z| \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x} = \arg z \end{aligned}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \end{aligned}}$$

se $x=0$ $\phi = \pm 90°$

se $x<0$ si aggiungen

→ <u>FORMA CARTESIANA, TRIGONOMETRICA, ESPONENZIALE</u>:

$$\boxed{z = x + jy = \rho(\cos\phi + j\sin\phi) = \rho e^{j\phi}}$$

<u>FORMULA DI EULERO</u>

→ <u>OPERAZIONI</u>

<u>ADDIZIONE/SOTTRAZIONE</u>: Si sommano le rispettive parti REALI ed IMMAGINARIE

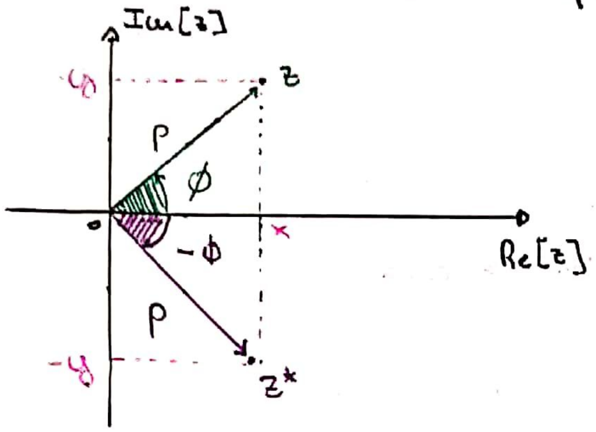
<u>MOLTIPLICAZIONE</u>: Si moltiplica ALGEBRICAMENTE, ricordando che

$$\boxed{j^2 = -1}$$

conviene <u>ESPONENZIALMENTE</u>

$$\boxed{[\rho_1 e^{j\phi_1}] \cdot [\rho_2 e^{j\phi_2}] = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}}$$

Sia z un numero complesso, allora z^* e' il suo CONIUGATO.



$$\boxed{z = x + jy}$$

CONIUGATO

$$\boxed{z^* = x - jy}$$

DIVISIONE : la divisione si può ottenere moltiplicando e dividendo la frazione per il CONIUGATO del DENOMINATORE.

comunque ESPONENZIALMENTE

$$\boxed{\frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}}$$

SINUSOIDI e FASORI

Definiamo <u>SINUSOIDE</u> una funzione del tipo:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A}_{\substack{\text{AMPIEZZA}\\(>0)}} \cos(\underbrace{\omega}_{\substack{\text{PULSAZIONE}\\\text{o}\\\text{FREQUENZA}\\\text{ANGOLARE}\\(>0)}} t + \underbrace{\phi}_{\text{FASE}})}$$

<u>SINUSOIDE</u>

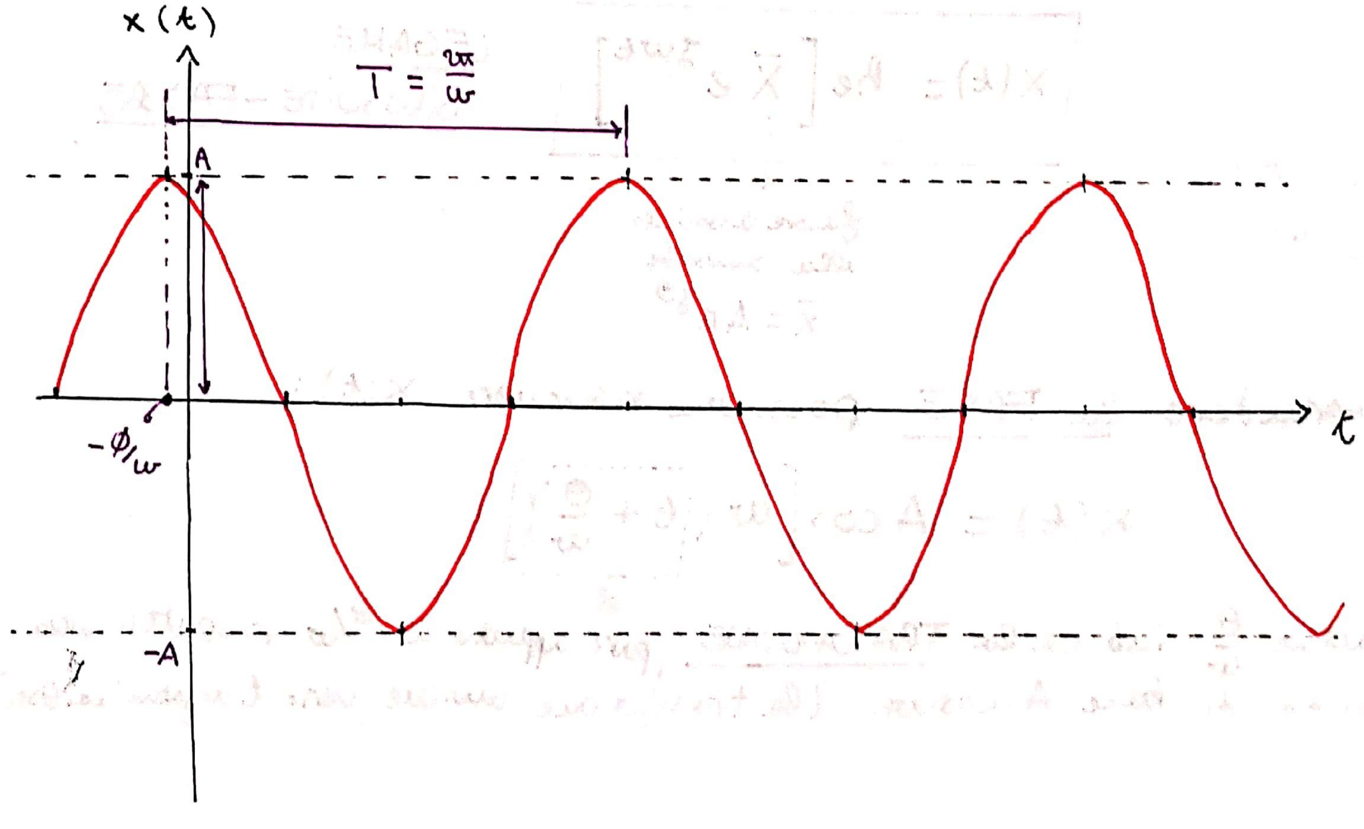
FASE ~ si misura in RADIANTI nei calcoli! [RAD ϕ]

possiamo inoltre definire

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ <u>PERIODO</u> intervallo di tempo dopo il quale la funzione si ripete.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$ <u>FREQUENZA</u> [Hertz $Hz = s^{-1}$]

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$ <u>PULSAZIONE</u>



FASORI

Una volta specificata la <u>FREQUENZA</u>, OGNI SINUSOIDE È RAPPRESEN-
-TATA DA DUE SOLI NUMERI REALI, l'AMPIEZZA e la FASE.

$$A\cos(\omega t + \theta) \xrightarrow[\text{DA}]{\text{DIPENDE}} A, \theta$$

con la FREQUENZA SOTTOINTESA.

possiamo interpretare <u>A</u> e <u>θ</u> come MODULO (A) e ARGOMENTO (θ) di un NUMERO COMPLESSO:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \leftrightarrow \boxed{\bar{X} = Ae^{j\theta}}}$$

FASORE
(è un numero COMPLESSO)

data una <u>SINUSOIDE</u> di AMPIEZZA A e FASE θ
si chiama <u>FASORE ASSOCIATO</u>
il NUMERO COMPLESSO di MODULO A e ARGOMENTO θ.

ad ogni SINUSOIDE corrisponde UNO e UN SOLO FASORE!

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\left[\bar{X} e^{j\omega t}\right]}$$

<u>LEGAME</u>
<u>SINUSOIDE - FASORE</u>

fasore associato
alla sinusoide
$\bar{X} = Ae^{j\theta}$

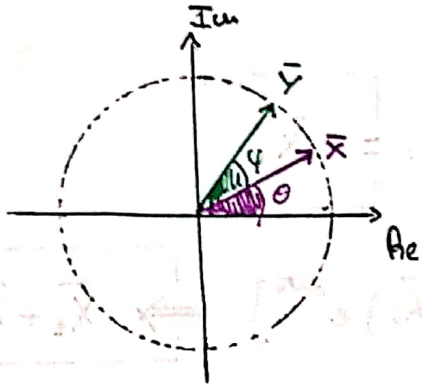
*<u>NOTA</u>:
il FASORE
è una COSTANTE
che <u>non</u> dipende
da t.

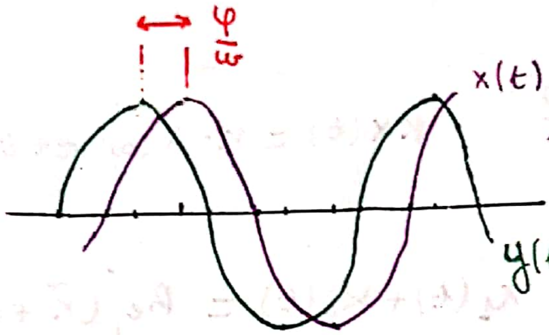
Per comprendere <u>la FASE</u> possiamo riscrivere $x(t)$:

$$x(t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{\theta}{\omega}\right)\right]$$

⊛ il termine $\frac{\theta}{\omega}$ indica la <u>TRASLAZIONE</u>, pari appunto a θ/ω rispetto alla sinusoide di base $A \cdot \cos\omega t$ (<u>la traslazione</u> avviene verso t negativo con θ>0)

Consideriamo ora DUE SINUSOIDI CON DIFFERENZA DI FASE φ





$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ in RITARDO su y

$y(t) = A\cos(\omega t + \phi + \varphi)$ in ANTICIPO su x

Quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la TRASLAZIONE è $\frac{T}{4}$ e le SINUSOIDI sono in QUADRATURA

$(\bar{X} \perp \bar{Y})$

ovvero quando una è MASSIMA o MINIMA l'altra si annulla.

Quando $\varphi = \pi$ la TRASLAZIONE è $\frac{T}{2}$ e le SINUSOIDI sono in OPPOSIZIONE DI FASE

PROPRIETÀ DEI FASORI

MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE

$$kx(t) = k \cdot A\cos(\omega t + \theta) = \boxed{k\bar{X}}$$

ADDIZIONE
(sinusoidi isofrequenziali)

$$x_1(t) + x_2(t) = Re\left[(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)\, e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \boxed{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}$$

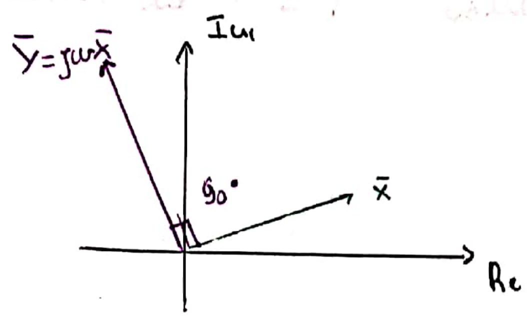
DERIVAZIONE

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}\left[x(t)\right] = -A\omega \sin(\omega t + \theta)$$

$$\boxed{\bar{Y} = j\omega \bar{X}}$$

→ il modulo è quello di $\bar{X}$ moltiplicato per ω
→ il vettore è RUOTATO di 90° in senso ANTIORARIO



ANALISI DI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

Ipotizzando un circuito del PRIMO ORDINE con un GENERATORE sinusoidale la SOLUZIONE sarà:

$$x(t) = \underbrace{k e^{-\frac{t}{\tau}}}_{1} + \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{2}$$

dove il PRIMO TERMINE è la RISPOSTA TRANSITORIA, mentre il SECONDO TERMINE è la RISPOSTA PERMANENTE.

LA RISPOSTA COMPLETA TENDE A QUELLA PERMANENTE PER $t \to \infty$

Ipotizzando TUTTE LE GRANDEZZE SINUSOIDALI CON LA STESSA PULSAZIONE si dice che:

Un CIRCUITO è in REGIME SINUSOIDALE QUANDO TUTTE LE TENSIONI e TUTTE LE CORRENTI sono SINUSOIDALI, con la STESSA PULSAZIONE ω.

allora:

I) le grandezze in REGIME SINUSOIDALE non dipendono dalla CONDIZIONE INIZIALE.

II) l'EQUAZIONE DIFFERENZIALE non è NECESSARIA, perché tramite i FASORI, possiamo ricavare un CIRCUITO RESISTIVO FITTIZIO, equivalente a quello dato in regime sinusoidale.

→ SINUSOIDI e FASORI NOTEVOLI

SINUSOIDE	FASORE
$A\cos\omega t$	A
$A\sin\omega t$	$-jA$
$-A\sin\omega t$	jA
$-A\cos\omega t$	$-A$

i COMPONENTI in REGIME SINUSOIDALE

RESISTORE

$$\boxed{\bar{V} = R\bar{I}}$$

Legge di OHM simbolica

$|\bar{V}| = R \cdot |\bar{I}|$

$\arg \bar{V} = \arg \bar{I}$

(tensione, corrente in fase)

INDUTTORE

$$\boxed{\bar{V} = \underbrace{j\omega L}_{\text{derivata } \bar{I}} \bar{I}}$$

TENSIONE e CORRENTE in QUADRATURA

(TENSIONE in ANTICIPO)

$|\bar{V}| = \omega L |\bar{I}| \quad \arg \bar{V} = \arg \bar{I} + 90°$

(antiorario)

CONDENSATORE

$$\boxed{\bar{I} = j\omega C \bar{V}}$$

TENSIONE e CORRENTE in QUADRATURA

(CORRENTE in ANTICIPO)

$|\bar{I}| = \omega C |\bar{V}| \quad \arg \bar{I} = \arg \bar{V} + 90°$

IMPEDENZA

$$\boxed{\bar{V} = \underbrace{\bar{Z}}_{\text{impedenza}} \cdot \bar{I}}$$

LEGGE DI OHM SIMBOLICA

→ per tutti i precedenti componenti, in regime sinusoidale, è possibile ESPLICITARE LA TENSIONE in FUNZIONE della CORRENTE mediante un PARAMETRO $\bar{Z}$, in una legge di ohm simbolica.

→ $\bar{Z}$ si comporta simbolicamente come una RESISTENZA si misura in ohm Ω e vale:

$\boxed{\bar{Z} = R}$ per il RESISTORE

$\boxed{\bar{Z} = j\omega L}$ per l' INDUTTORE

$\boxed{\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C}}$ per il CONDENSATORE

AMMETTENZA

$$\boxed{\bar{I} = \underbrace{\bar{Y}}_{\text{ammettenza}} \bar{V}}$$

→ è il DUALE dell'impedenza.

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}}$$

$\bar{Y} = \frac{1}{R} = G$ per il RESISTORE

$\bar{Y} = \frac{1}{j\omega L}$ per l' INDUTTORE

$\bar{Y} = j\omega C$ per il CONDENSATORE

...che gli altri elementi RESISTIVI continuano a mantenere le loro RELAZIONI CARATTERISTICHE:

GENERATORE CONTROLLATO $\quad v(t) = k\, i(t) \rightarrow \boxed{\bar{V} = k\bar{I}}$ (esempio)

OP.AMP. $\quad \boxed{\bar{V}_d = 0 \quad \bar{I}_+ = \bar{I}_- = 0}$

TECNICHE DI ANALISI

Tutte le tecniche di analisi circuitale, valide nei CIRCUITI RESISTIVI, continuano a valere anche nel DOMINIO DEI FASORI.

Valgono ancora:

→ LEGGI DI KIRCHHOFF

→ BIPOLI IN SERIE - PARALLELO

in serie $\boxed{\bar{Z}_s = \sum_{k=1}^{N} \bar{Z}_k}$ in parallelo $\boxed{\bar{Y}_p = \sum_{k=1}^{N} \bar{Y}_k}$

→ ANALISI NODALE

→ LINEARITÀ

→ SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI (se ci sono più generatori indipendenti ISOFREQUENZIALI)

→ TEOREMA DI THEVENIN e TEOREMA DI NORTON

$R_{eq} \rightarrow$ IMPEDENZA EQ. $\bar{Z}_{eq}$ $\qquad R_{eq} \rightarrow$ AMMETTENZA EQ. $\bar{Y}_{eq}$

METODO SIMBOLICO DEI FASORI

Sostituire OGNI GENERATORE INDIPENDENTE di PULSAZIONE ω con un GENERATORE DI VALORE COSTANTE, pari al FASORE CORRISPONDENTE. $Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$ (1)

↓

(2) Sostituire OGNI VARIABILE (TENSIONE o CORRENTE) con il FASORE CORRISPONDENTE

↓

Sostituire OGNI:

→ CONDENSATORE di CAPACITÀ C con un BIPOLO di IMPEDENZA $\frac{1}{j\omega C}$ (3)

→ INDUTTORE di INDUTTANZA L con un BIPOLO di IMPEDENZA $j\omega L$

↓

(4) Analizzare il CIRCUITO OTTENUTO alla stregua di un CIRCUITO RESISTIVO ricavando le GRANDEZZE DESIDERATE.

↓

Ricavare le GRANDEZZE SINUSOIDALI con l'ANTITRASFORMAZIONE: (5)

$$\boxed{\bar{X} = Ae^{j\theta} \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \theta)}$$

→ Moltiplicare per j un fasore significa $+90°$ di fase (antiorario!)

→ nel II e III QUADRANTE $\arctan\frac{y}{x} + \pi$!

nel dettaglio:

→ BIPOLI IN SERIE O IN PARALLELO

N Bipoli in serie sono equivalenti ad un solo bipolo di IMPEDENZA $\bar{Z}_S$

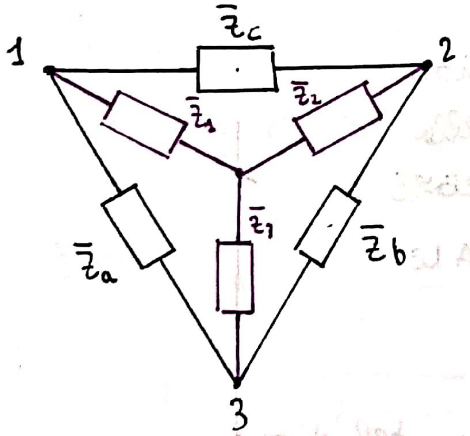
$$\boxed{\bar{Z}_S = \sum_{k=1}^{N} \bar{Z}_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}}$$

N Bipoli in parallelo sono equivalenti ad un solo bipolo di AMMETTENZA $\bar{Y}_P$

$$\boxed{\bar{Y}_P = \sum_{k=1}^{N} \bar{Y}_k}$$

→ TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO e TRIANGOLO-STELLA



$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b + \bar{Z}_c} \qquad \bar{Y}_a = \frac{\bar{Y}_1 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_b \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b + \bar{Z}_c} \qquad \bar{Y}_b = \frac{\bar{Y}_2 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_b}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b + \bar{Z}_c} \qquad \bar{Y}_c = \frac{\bar{Y}_1 \cdot \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}$$

$\Delta \rightarrow Y$ $\qquad$ $Y \rightarrow \Delta$

→ SISTEMA ANALISI NODALE per ISPEZIONE VISIVA

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} & \cdots & \bar{y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \bar{y}_{N1} & & & \bar{y}_{NN} \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE DELLE AMMETTENZE DI NODO}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_N \end{bmatrix}}_{\text{FASORI DI NODO RISPETTO AL RIFERIMENTO}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{S1} \\ \bar{I}_{S2} \\ \vdots \\ \bar{I}_{SN} \end{bmatrix}$$

N: numero di Nodi (escluso riferimento)

$\bar{y}_{ii}$: SOMMA AMMETTENZE dei Bipoli CONNESSI al NODO i

$\bar{y}_{ij}$: − (SOMMA DELLE AMMETTENZE DEI BIPOLI CONNESSI TRA IL NODO i e il NODO j)

$\bar{I}_{Si}$: SOMMA ALGEBRICA DEI FASORI DEI GENERATORI DI CORRENTE CONNESSI AL NODO i (POSITIVI: CORRENTI COL SEGNO DI RIF. ENTRANTE)

→ RAPPRESENTAZIONE ESTERNA DI BIPOLI

per il TEOREMA DI THEVENIN:

$$\boxed{\bar{V} = \bar{Z}_T \bar{I} + \bar{V}_T}$$

rappresenta tra il FASORE della TENSIONE e quello della CORRENTE per un BIPOLO GENERALE.

→ se il BIPOLO è PRIVO DI GENERATORI INDIPENDENTI, la tensione a vuoto si annulla e:

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_m}{I_m} \angle(\theta_v - \theta_i)}$$

impedenza specifica la RELAZIONE ESISTENTE tra la TENSIONE e la CORRENTE AI MORSETTI

il MODULO dell'IMPEDENZA coincide con il RAPPORTO fra l'AMPIEZZA della TENSIONE e l'AMPIEZZA della CORRENTE

l'ARGOMENTO con LA DIFFERENZA TRA LE FASI.

l'IMPEDENZA è dunque un NUMERO COMPLESSO del tipo:

DI UN BIPOLO GENERICO

$$\boxed{\bar{Z} = R + jX}$$

REATTANZA

RESISTENZA

RESISTORE	$\bar{Z} = R$	$R = R$	$X = 0$
INDUTTORE	$\bar{Z} = j\omega L$	$R = 0$	$X = \omega L$
CONDENSATORE	$\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$R = 0$	$X = \frac{-1}{\omega C}$

r cui possiamo distinguere:

Bipoli
- RESISTIVI $\bar{Z} = R$
- REATTIVI $\bar{Z} = jX$
- INDUTTIVI $X > 0$
- CAPACITIVI $X < 0$

analogamente con l'AMMETTENZA:

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{I_m}{V_m} \angle(\theta_i - \theta_v)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\bar{Y} = G + jB}$$

SUSCETTANZA

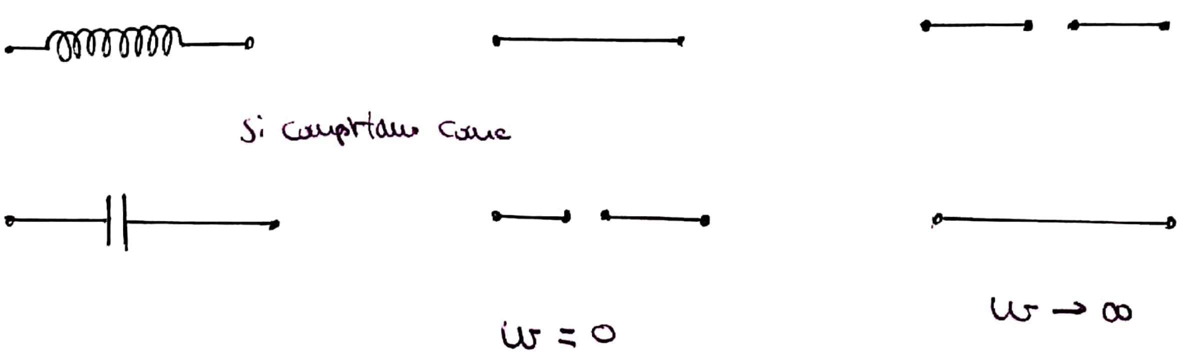
CONDUTTANZA

RESISTORE	$\bar{Y} = 1/R$	$G = 1/R$	$B = 0$
INDUTTORE	$\bar{Y} = -\frac{j}{\omega L}$	$G = 0$	$B = -\frac{1}{\omega L}$
CONDENSATORE	$\bar{Y} = j\omega C$	$G = 0$	$B = \omega C$

Infine:

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}}$$

Impedenza e Ammettenza DIPENDONO dalla FREQUENZA ω.



POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE (NOTA: $\bar{A}^*$ è FASORE CONIUGATO)

Sia un Bipolo costituito dalle seguenti espressioni per la TENSIONE e per la CORRENTE.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$\downarrow$

in FASORI:

$$\bar{V} = V_m \angle \theta_v$$
$$\bar{I} = I_m \angle \theta_i$$

→ POTENZA ATTIVA e ISTANTANEA

allora, possiamo definire la POTENZA ISTANTANEA:

$$\boxed{p(t) = \boxed{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)} + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}$$

↳ POTENZA ATTIVA P

[Watt W]

(non dipende dal tempo) è COSTANTE

è il VALORE MEDIO in un PERIODO della POTENZA ISTANTANEA.

→ la POTENZA istantanea oscilla intorno ad un valore costante pari alla POTENZA ATTIVA P.

il VALORE MASSIMO della POTENZA ISTANTANEA è la POTENZA DI PICCO (pari a $P + \frac{1}{2} V_m I_m$)

nei COMPONENTI:	POTENZA ISTANTANEA p(t)	POTENZA ATTIVA (media) P
RESISTORE	$p(t) = \frac{1}{2} R I_m^2 + \frac{1}{2} R I_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i)$	$P = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}$
INDUTTORE	$p(t) = -\frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin(2\omega t + 2\theta_i)$	$P = 0$
CONDENSATORE	$p(t) = \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \sin(2\omega t + 2\theta_i)$	$P = 0$

→ VALORE EFFICACE

Un resistore percorso da:

→ CORRENTE COSTANTE ha POTENZA ISTANTANEA $p = R_1 I^2$
COSTANTE

→ CORRENTE SINUSOIDALE $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ ha POTENZA MEDIA pari a $\frac{1}{2} R_1 I_m^2$

possiamo allora definire il VALORE EFFICACE della CORRENTE SINUSOIDALE:
(uguagliando le due potenze)

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Il valore efficace di una CORRENTE SINUSOIDALE (TENSIONE SINUSOIDALE) è il VALORE di QUELLA CORRENTE COSTANTE che scorrendo nello stesso RESISTORE PROVOCA la DISSIPAZIONE della STESSA POTENZA MEDIA

e analogamente per la TENSIONE SINUSOIDALE

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

POTENZA COMPLESSA

Considerando l'IMPEDENZA e l'AMMETTENZA, possiamo allora definire la POTENZA COMPLESSA $\bar{S}$.

$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V} \cdot \bar{I}^*} \to \text{coniugato}$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

Il MODULO di $\bar{S}$ è detto POTENZA APPARENTE:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} V_m I_m = V_{eff} I_{eff}}$$

Il $\cos\varphi$, dove $\boxed{\varphi = \arg \bar{S} = \theta_v - \theta_i}$ è detto FATTORE DI POTENZA

Possiamo allora RISCRIVERE la POTENZA COMPLESSA così:

$$\boxed{\bar{S} = P + jQ} = \boxed{\frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi + j \cdot \frac{1}{2} V_m I_m \sin\varphi}$$

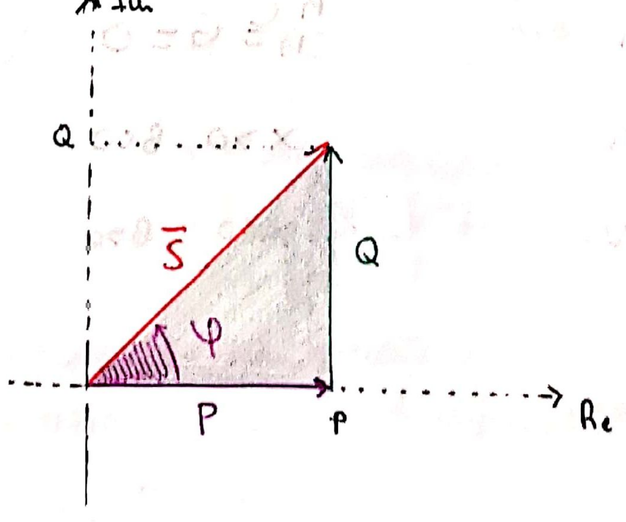
P = POTENZA MEDIA

Q = POTENZA REATTIVA

$\Rightarrow$ $P = Re[\bar{S}]$

$Q = Im[\bar{S}]$

TRIANGOLO DELLE POTENZE



Possiamo dunque riassumere le formule così:

POTENZA COMPLESSA	$\bar{S} = P + jQ$	→ Volt·Ampere [VA]
POTENZA APPARENTE	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$	
FATTORE DI POTENZA	$\cos\varphi = \frac{P}{S}$	
POTENZA ATTIVA	$P = S\cos\varphi$	→ Watt [W]
POTENZA REATTIVA	$Q = S\sin\varphi$	→ Volt Ampere Reattivi [VAR]

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

POTENZA ATTIVA e REATTIVA si possono ottenere anche da Impedenza e Ammettenza

$$I_m = \frac{V_m}{R}$$

$$\bar{Z} \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2} R I_m^2 \qquad Q = \frac{1}{2} X I_m^2} \qquad \bar{Z} = R + jX$$

dall'IMPEDENZA $\bar{Z}$

$$\bar{Y} \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2} G V_m^2 \qquad Q = -\frac{1}{2} B V_m^2} \qquad \bar{Y} = G + jB$$

dall'AMMETTENZA $\bar{Y}$

→ DISTINZIONE DEI BIPOLI

BIPOLI	CARATTERISTICHE		
PASSIVI	$R \geq 0 \quad G \geq 0$	$P \geq 0$	
RESISTIVI	$X = B = 0$	$Q = 0$	SOLO PARTE REALE
REATTIVI	$R = G = 0$	$P = 0$	SOLO PARTE IMMAGINARIA
INDUTTIVI	$X > 0 \quad B < 0$	$Q > 0$	
CAPACITIVI	$X < 0 \quad B > 0$	$Q < 0$	

Bisogna specificare se il FATTORE DI POTENZA $\cos\varphi$ è in ANTICIPO o RITARDO (riferiti alla CORRENTE e la sua fase θ_i)

CONSERVAZIONE DELLA POTENZA COMPLESSA

Le proprietà di conservazione valgono anche per la POTENZA COMPLESSA:

$$\boxed{\sum_k \bar{S}_k = \sum_k (P_k + jQ_k) = 0}$$

→ di TUTTI i k elementi del CIRCUITO!

↓

$$\boxed{\sum_k P_k = 0 \qquad \sum_k Q_k = 0}$$

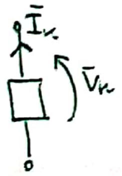
che può anche essere scritta:

$\bar{S}$ erogata dal GENERATORE ←

$$\boxed{\sum_{k \text{ generatori}} \bar{S}_k = \sum_{k \text{ elementi PASSIVI}} \bar{S}_k}$$

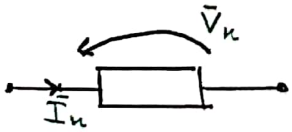
$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^*$

(si cambia verso alla corrente)

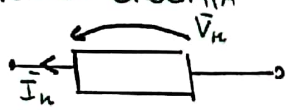


La SOMMA delle POTENZE COMPLESSE erogate dai GENERATORI è uguale alla SOMMA delle POTENZE COMPLESSE assorbite dagli ELEMENTI PASSIVI

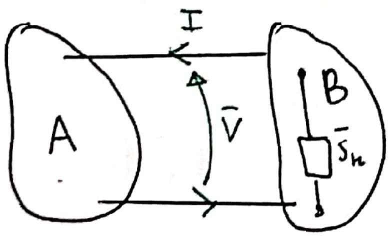
POTENZA ASSORBITA



POTENZA EROGATA



oppure, considerando SEPARATAMENTE un BIPOLO A, e TUTTI GLI ALTRI ELEMENTI DEL BIPOLO B:



TEOREMA DI BOUCHEROT

$$\boxed{\frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \sum_{k \in B} \bar{S}_k}$$

↓

POTENZA COMPLESSA **ASSORBITA** dal BIPOLO B

Teorema di Boucherot

La POTENZA COMPLESSA ASSORBITA da un BIPOLO è UGUALE alla SOMMA DELLE POTENZE COMPLESSE ASSORBITE DAGLI ELEMENTI che lo COMPONGONO. Lo STESSO VALE per POTENZA ATTIVA e REATTIVA.

RIFASAMENTO

Nelle applicazioni la POTENZA PERSA DURANTE LA TRASMISSIONE DIMINUISCE se RIUSCIAMO A RIDURRE SUL CARICO LO SFASAMENTO TRA TENSIONE E CORRENTE.

Per CARICHI INDUTTIVI, ciò è possibile inserendo un CONDENSATORE IN PARALLELO di CAPACITÀ:

$$\boxed{C = \frac{|Q_c|}{\omega V_{eff}^2} = \frac{P_u\,(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{\omega V_{eff}^2}}$$

Q_c : DIFFERENZA TRA POTENZE REATTIVE Q

ω : frequenza

V_{eff} : TENSIONE EFFICACE

P_u : POTENZA SUL CARICO $[P_u = V_{eff} I_{e,eff} \cos\varphi]$

φ_i : DIFFERENZA DI FASE

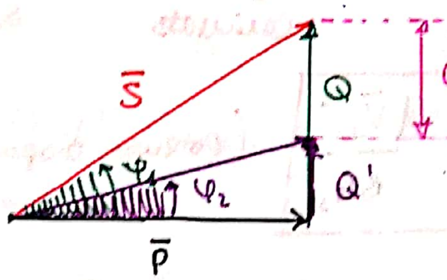
RIFASAMENTO COMPLETO $\boxed{\varphi_2 = 0}$

ricordando che $\varphi = \arctan \frac{Q}{P}$, può essere utile visualizzare il problema così:

RIFASAMENTO ACCETTABILE

$\boxed{\cos\varphi \geq 0{,}95}$

$\varphi < 18°,19$

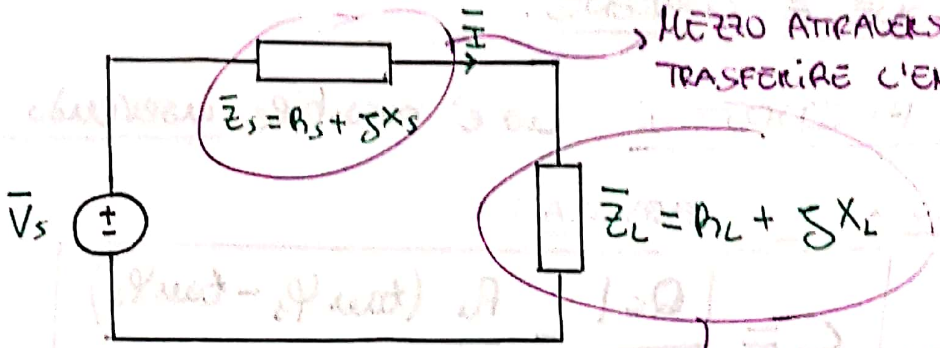


Bisogna diminuire la POTENZA REATTIVA di Q_c

→ MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

Generalizziamo il PROBLEMA della MASSIMA POTENZA EROGATA DAL GENE-RATORE REALE nel DOMINIO DEI FASORI.

Sia il seguente circuito:



→ MEZZO ATTRAVERSO CUI VOGLIAMO TRASFERIRE L'ENERGIA.

→ BIPOLO DI IMPEDENZA $\bar{Z}_L$ è il CARICO a cui vogliamo trasmettere POTENZA

Cerchiamo quale valore deve avere Z_L affinchè il CARICO ASSORBA la MASSIMA POTENZA MEDIA.

La soluzione è:

$$\boxed{\bar{Z}_L = R_S - jX_S = \bar{Z}_S^*}$$

→ coniugato

TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

Un generatore di IMPEDENZA INTERNA $\bar{Z}_S$ trasferisce al CARICO la MASSIMA POTENZA MEDIA se

$$\boxed{\bar{Z}_L = \bar{Z}_S^*}$$

coniugato

→ per un BIPOLO GENERICO si applica THEVENIN e si usa $\bar{V}_{THEV.}$ e $\bar{R}_{THEV}$

la POTENZA MASSIMA è:

$$\boxed{P_{disp} = \frac{|\bar{V}_S|^2}{8R_S}}$$

(potenza disponibile)

il RENDIMENTO

$$\boxed{\eta = \frac{P_L}{P_L + P_s} = \frac{R_L}{R_L + R_s}}$$

SOVRAPPOSIZIONE POTENZA di frequenze diverse

$\omega_1 = \omega_2$ si sommano FASORI ma non POTENZE

$\omega_1 \neq \omega_2$ NON si sommano FASORI ma si SOMMANO POTENZE MEDIE.

Risposta in frequenza

→ Funzioni di rete

Dato un INGRESSO di un CIRCUITO ed una USCITA, detti rispettivamente:

→ INPUT: un fasore che rappresenta una TENSIONE o una CORRENTE dell'INGRESSO. $\bar{V}_{in}$ opp. $\bar{I}_{in}$

→ OUTPUT: un fasore che rappresenta una TENSIONE o una CORRENTE dell'USCITA. $\bar{V}_o$ opp. $\bar{I}_o$

queste sono legate come segue:

$$\boxed{\bar{X}_o = \underbrace{\bar{F}(\omega)} \bar{X}_{in}}$$

dove $\bar{X}$ è il fasore di una TENSIONE o di una CORRENTE.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\boxed{\bar{F}(\omega) = \frac{\text{fasore della RISPOSTA}}{\text{fasore dell'INGRESSO}}}$$

→ QUALUNQUE FUNZIONE DI RETE è un RAPPORTO DI POLINOMI di VARIABILE COMPLESSA ($j\omega$) (è una funzione RAZIONALE REALE)

dove

la RISPOSTA può essere una qualunque TENSIONE o CORRENTE del CIRCUITO

l'INGRESSO è l'unico GENERATORE INDIPENDENTE presente nel CIRCUITO

le più ricorrenti sono:

- IMPEDENZA DI TRASFERIMENTO

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}_{in}}} \quad /\text{OHM}/$$

- RAPPORTO DI TRASFERIMENTO in TENSIONE

$$\boxed{\bar{H} = \frac{\bar{V}}{\bar{V}_{in}}} \quad [\text{ADIM.}]$$

- RAPPORTO DI TRASFERIMENTO in CORRENTE

$$\boxed{\bar{H} = \frac{\bar{I}}{\bar{I}_{in}}} \quad [\text{ADIM.}]$$

- AMMETTENZA DI TRASFERIMENTO

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}_{in}}} \quad /\text{SIEMENS}/$$

→ RISPOSTA IN FREQUENZA

Siamo giunti alla relazione

$$\bar{V}_o = \bar{F}(j\omega)\bar{V}_{in}$$

nel DOMINIO DEL TEMPO allora RISULTA:

$$v_o(t) = |\bar{V}_o| \cos(\omega t + \phi_o) =$$

$$\boxed{= |\bar{F}(j\omega)| V_{in} \cos(\omega t + \theta + \phi(\omega))}$$

l'insieme delle due risposte è la RISPOSTA IN FREQUENZA

RISPOSTA IN AMPIEZZA

moltiplicazione della ampiezza per un fattore pari a $|\bar{F}(j\omega)|$

RISPOSTA IN FASE

rotazione di fase pari all'ARGOMENTO di $\bar{F}(j\omega)$

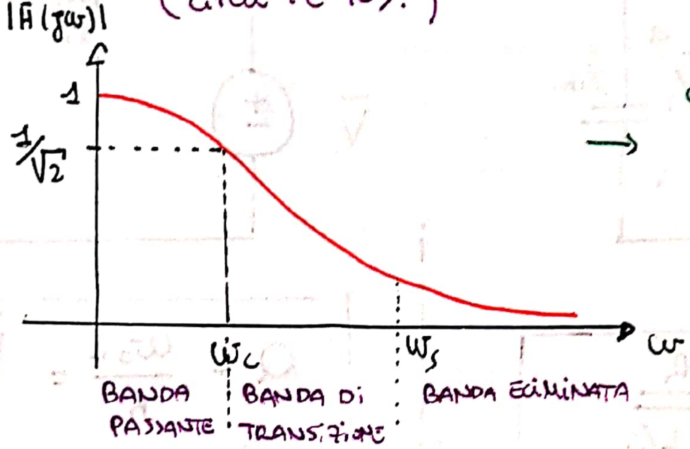
possiamo capire come si comporta il circuito al variare di ω

PROPRIETÀ FILTRANTI DEI CIRCUITI

si indica con ω_c la <u>PULSAZIONE DI TAGLIO</u>

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{\tau}}$$

è il VALORE DI ω per cui la RISPOSTA IN AMPIEZZA è RIDOTTA DI UN FATTORE $1/\sqrt{2}$ (circa il 70%)



→ certe frequenze vengono "ANNULLATE" (ridotte di ampiezza)

Sia poi la RISPOSTA COMPLETA:

$$v(t) = ke^{-t/\tau} + |\bar{H}(j\omega)| V_m \cos(\omega t + \phi(\omega))$$

Si nota che la DURATA DEL TRANSITORIO AUMENTA mentre la BANDA PASSANTE SI RESTRINGE, se aumentiamo τ.

→ un FILTRO può essere:

- <u>PASSABASSO</u> elimina $\omega \notin [0, \omega_c]$
- <u>PASSA ALTO</u> elimina $\omega \in [0, \omega_c]$
- <u>PASSA BANDA</u> elimina $\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$
- <u>ELIMINA BANDA</u> elimina $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

→ DISTORSIONE DI FASE

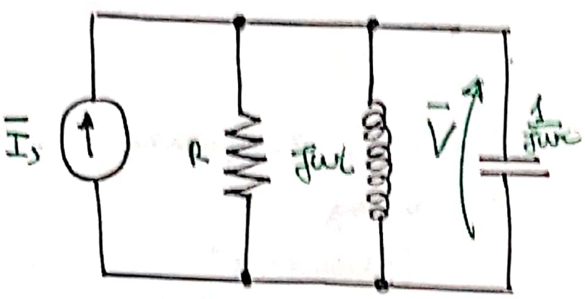
Supponiamo un generatore di tensione con due componenti, se l'entità del ritardo nelle due componenti che caratterizzeranno la tensione in uscita è uguale, si avrà un semplice ritardo nella risposta altrimenti distorsione in fase.

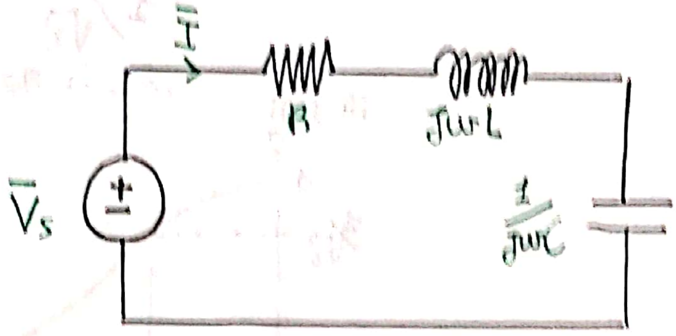
$$t_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

→ PRINCIPALI FORMULE PER I CIRCUITI RISONANTI

Diversi SISTEMI FISICI MOSTRANO UNA RISPOSTA ACCENTUATA AD UNA SOLLECITAZIONE ESTERNA, quando la FREQUENZA ω di tale sollecitazione assume un valore particolare.
OPERATIVAMENTE, la tensione/corrente risulta moltiplicata per un fattore di qualità Q, che può anche assumere valori elevati, imponendo un'ampiezza anche molto più elevata di quella del generatore, con la possibilità di causare danni.

RLC parallelo





FATTORE DI QUALITÀ ←

$$Q = \omega_0 RC = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

↓ PULSAZIONE DI RISONANZA $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$|\bar{I}_L| = |\bar{I}_C| = Q\,\bar{I}_s$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$|\bar{V}_L| = |\bar{V}_C| = Q\,|\bar{V}_s|$$

formule comuni

esatte

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$\omega_{2,1} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$B_\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha = \omega_2 - \omega_1$$

per $Q > 5$

$$\omega_0 \cong \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_2, \omega_1 \cong \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

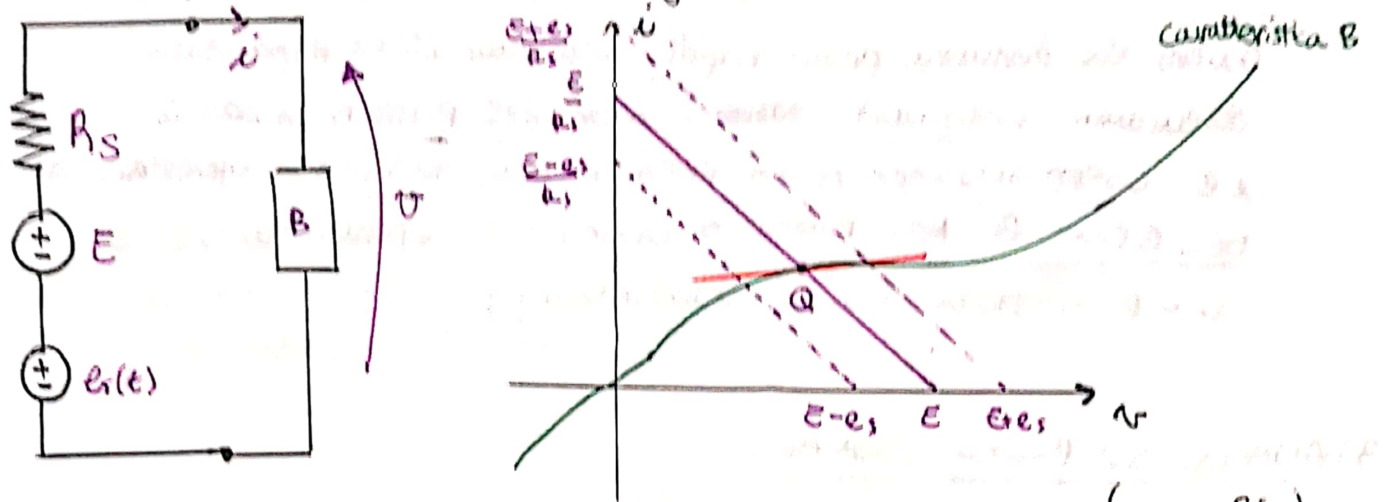
ω_1, ω_2 sono le PULSAZIONI DI TAGLIO (filtro passabanda)

B_ω = BANDA PASSANTE

ANALISI PER PICCOLI SEGNALI

Si utilizza quando nel circuito è presente un bipolo con una caratteristica NON-LINEARE (come può essere ad esempio $v = k i^3$)
In questo caso allora per piccole "oscillazioni" è possibile effettuare un'approssimazione della curva non-lineare con la tangente, ottenendo un errore trascurabile.

→ Sia ad esempio un circuito con un generatore costante ed uno sinusoidale.

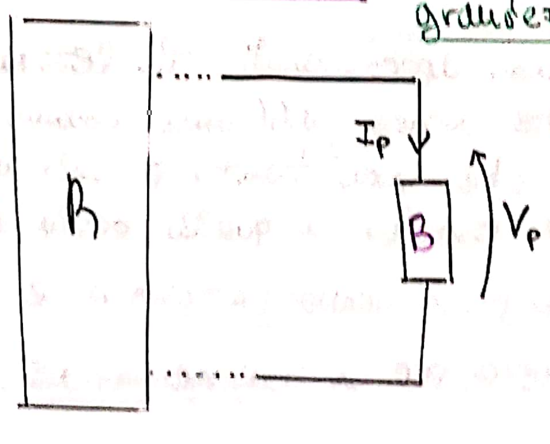


allora nell'intorno dei valori possibili dei generatori (piccoli) possiamo effettuare l'approssimazione.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1) CALCOLO DEL PUNTO DI LAVORO Q del Bipolo B.

Si considera il CIRCUITO a REGIME, dunque con solo i GENERATORI DI POLARIZZAZIONE (costanti indipendenti) mentre si spengono quelli di SEGNALE SINUSOIDALE. Inoltre, essendo a REGIME, il condensatore diventa un circuito aperto, e l'INDUTTORE un CORTO CIRCUITO. Trovo inoltre, in questo dominio, le altre grandezze che mi interessano.



PUNTO DI LAVORO

$$\boxed{Q(\tilde{V}_P, \tilde{I}_P)}$$

2) CALCOLO DEI PARAMETRI PER LA LINEARIZZAZIONE

Trovato il punto di lavoro Q, A PARTIRE DALLA RELAZIONE NON LINEARE possiamo calcolarci i PARAMETRI per la LINEARIZZAZIONE.
(matematicamente stiamo calcolando la tangente alla curva nel punto di lavoro, per approssimare)

CALCOLANDO:

$$\boxed{r_d = \left.\frac{dv_B}{di_B}\right|_Q \quad \text{opp.} \quad g_d = \left.\frac{di_B}{dv_B}\right|_Q} \qquad \boxed{C_d = \frac{dq}{dV}}$$

CAPACITÀ DIFF.

ovvero la derivata prima rispetto alla variabile esplicitata otteniamo, sostituendo i valori del PUNTO DI LAVORO Q.
è il COEFF. ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA CARATTERISTICA DEL BIPOLO B NEL PUNTO DI LAVORO (che operativamente è una RESISTENZA o una CONDUTTANZA!)

3) ANALISI SU PICCOLO SEGNALE

CONSIDERIAMO ORA L'EFFETTO DEI SOLI GENERATORI DI SEGNALE SINUSOIDALE, trattando il BIPOLO B come un RESISTORE con resistenza r_d o conduttanza g_d, trovate al punto 2.
Risolvo con la SOLITA ANALISI IN REGIME SINUSOIDALE trovando le GRANDEZZE DI INTERESSE.

4) RISULTATI FINALI

Le GRANDEZZE RICHIESTE saranno la SOMMA DEI CONTRIBUTI CALCOLATI al PUNTO 1 e al PUNTO 3, nel DOMINIO DEL TEMPO

5) COMMENTO DI ERRORE: Avendo approssimato la RETE NON LINEARE DI PARTENZA con un'altra RETE LINEARE abbiamo commesso un ERRORE DI APPROSSIMAZIONE, che sarà tanto piccolo quanto più piccolo è l'effetto del segnale rispetto a quello della polarizzazione.
CALCOLIAMO VALORI MAX e MIN DELLA GRANDEZZA TROVATA e ricalcoliamo in tali CONDIZIONI i PARAMETRI PER LA LINEARIZZAZIONE, valutando gli SCOSTAMENTI PERCENTUALI

ANALISI PER PICCOLI SEGNALI

ALGORITMO

Considerando CIRCUITO A REGIME
(CONDENSATORI → CIRCUITO APERTO
INDUTTORI → CORTO CIRCUITO)
Con i SOLI GENERATORI DI POLARIZZAZIONE si calcolano le GRANDEZZE RICHIESTE e il PUNTO DI LAVORO Q DEL BIPOLO NON LINEARE $(\tilde{V}, \tilde{I})$ (1)

↓ ↓ ↓

(2) A PARTIRE DALLA RELAZIONE NON LINEARE SI CALCOLA IL PARAMETRO DI LINEARIZZAZIONE (può essere una RESISTENZA, CONDUTTANZA, CAPACITÀ, etc...)

↓ ↓ ↓

Si considera ora il circuito con il SOLO EFFETTO DEI GENERATORI DI SEGNALE, trattando il Bipolo come un RESISTORE di resistenza r_d, g_d o CONDENSATORE di CAPACITÀ C_d, etc... TROVANDO LE GRANDEZZE DI INTERESSE (3)

↓ ↓ ↓

(4) Si SOMMANO I CONTRIBUTI CALCOLATI AL PUNTO (1) e (3) NEL DOMINIO DEL TEMPO.

↓ ↓ ↓

Si CALCOLANO i VALORI MAX e MIN DELLA GRANDEZZA TROVATA e si vedono i VALORI ASSUNTI DAI PARAMETRI DI LINEARIZZAZIONE PER QUEI VALORI.
Si RIPORTA DUNQUE LO SLOSTAMENTO PERCENTUALE DAL VALORE DI APPROSSIMAZIONE USATO (5)

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Consideriamo un sistema di due spire percorse da corrente i_1 e i_2. Il flusso ϕ concatenato alle due spire si può scrivere:

$$\phi_1 = L_{11} i_1 + L_{M} i_2$$

$$\phi_2 = L_{M} i_1 + L_{22} i_2$$

con $L_M = M$ detta INDUTTANZA MUTUA fra le due spire.

$M > 0$: se il flusso generato dalla spira 1 quando la spira 2 è disattivata è concorde con quello generato dalla spira 2 quando la 1 è disattivata.

$M < 0$: flusso discorde

Ad ogni PORTA è associato un FLUSSO ϕ.
In generale è possibile definire:

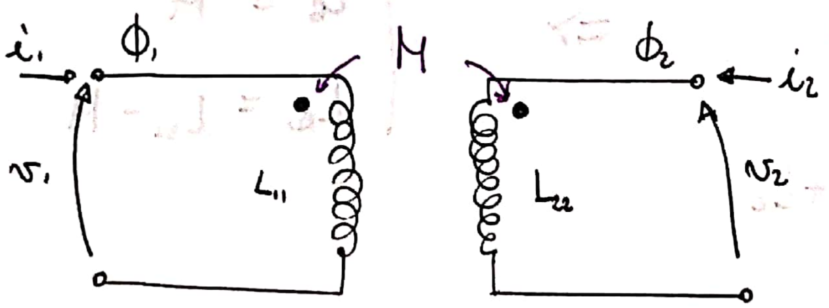
$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} ; \quad \underline{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{pmatrix}$$

legati dalla relazione:

$$\boxed{\underline{\phi} = \underline{\underline{L}}\, \underline{i}}$$

MATRICE INDUTTANZA

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_M \\ L_M & L_{22} \end{pmatrix}$$



se il simbolo • è spostato e diviene discorde $M < 0$

le RELAZIONI COSTITUTIVE sono:

$$\underline{v} = \frac{d\phi}{dt}$$

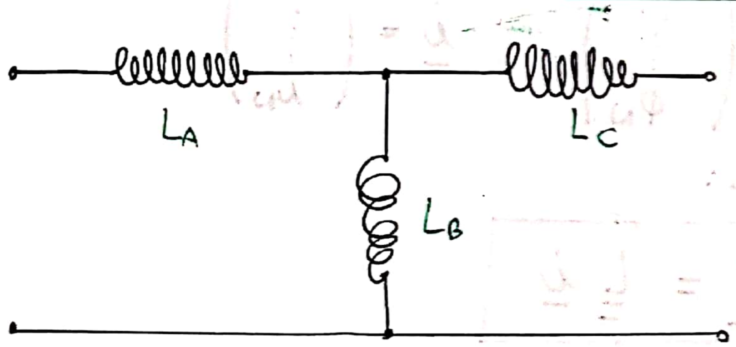
da cui:

$$\boxed{\underline{v} = \underline{\underline{L}} \frac{di}{dt}}$$

e nell'INDUTTORE A DUE PORTE:

$$\begin{cases} v_1 = L_{11} \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_{22} \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

un CIRCUITO EQUIVALENTE è il MODELLO EQUIVALENTE A T:



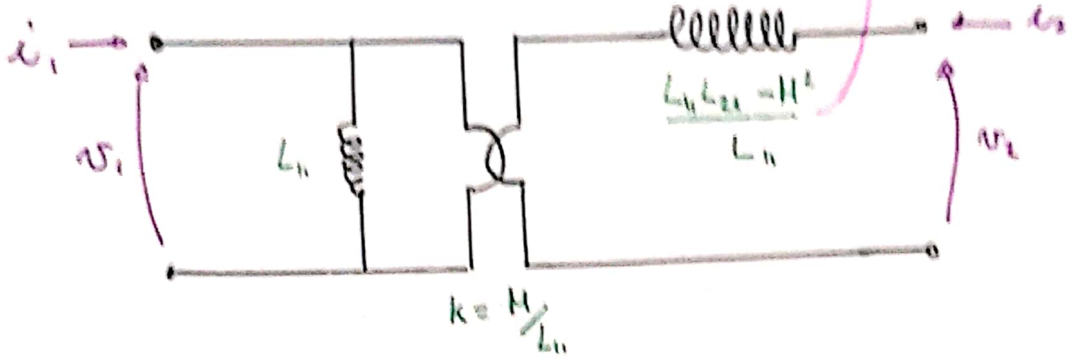
$$L_{11} = \left.\frac{\Phi_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = L_A + L_B$$

$$L_{12} = M = \left.\frac{\Phi_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = L_B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L_A = L_{11} - M \\ L_B = M \\ L_C = L_{22} - M \end{cases}$$

$$L_{22} = \left.\frac{\Phi_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = L_B + L_C$$

oppure

CIRCUITO CON TRASFORMATORE IDEALE !



se = 0 "ACCOPPIAMENTO PERFETTO"

$L_{11}L_{22} = M^2$

$M = \pm\sqrt{L_{11}L_{22}}$

$k = \sqrt{L_{22}/L_{11}}$

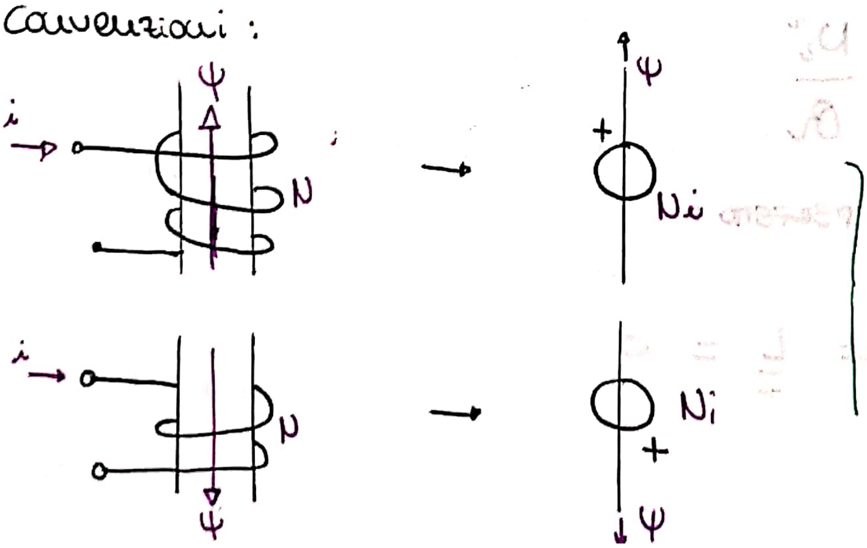
CIRCUITI MAGNETICI

Il calcolo della MATRICE INDUTTANZA di un SISTEMA DI AVVOLGIMENTI avvolti su un NUCLEO DI MATERIALE ad ALTA PERMEABILITÀ MAGNETICA è possibile attraverso un CIRCUITO MAGNETICO, che è un CIRCUITO ELETTRICO FITTIZIO.

Valgono infatti le SEGUENTI ANALOGIE:

circuiti elettrici		circuiti magnetici
R RESISTENZA	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{R}$ RILUTTANZA
i CORRENTE	$\longleftrightarrow$	ψ FLUSSO
e FORZA ELETTROMOTRICE	$\longleftrightarrow$	Ni FORZA MAGNETOMOTRICE
v TENSIONE ELETTRICA	$\longleftrightarrow$	$v_H = \mathcal{R}\psi$ "TENSIONE MAGNETICA"

Convenzioni:



REGOLA MANO DESTRA

Il <u>FLUSSO</u> è:

$$\Psi = \frac{\mu_r \mu_0 S}{L}(N_1 i_1 + N_2 i_2) = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}}$$

mentre i <u>FLUSSI CONCATENATI</u>:

$$\Phi_1 = N_1 \Psi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_2 = N_2 \Psi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

da cui la <u>MATRICE INDUTTANZA</u>:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

per l'ACCOPPIAMENTO PERFETTO:

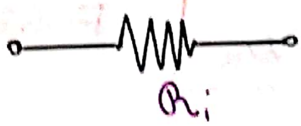
$$\det \underline{\underline{L}} = 0$$

TEORIA GENERALE DEI CIRCUITI MAGNETICI

1) Elementi MAGNETICAMENTE PASSIVI formati da tratti di LUNGHEZZA L_i e SEZIONE S_i

sono RAPPRESENTATI CIRCUITALMENTE da una RILUTTANZA

$$\boxed{\mathcal{R}_i = \frac{L_i}{\mu_{ri}\,\mu_0\,S_i}}$$



2) Elementi MAGNETICAMENTE ATTIVI formati da tratti di LUNGHEZZA L_K e SEZIONE S_K, PERMEABILITÀ μ_{rK} con un AVVOLGIMENTO di N_K spire percorso da CORRENTE i_K

è

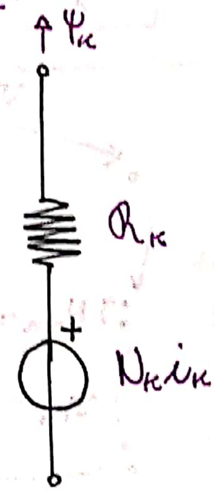
RAPPRESENTATO CIRCUITALMENTE da una RILUTTANZA

$$\boxed{\mathcal{R}_K = \frac{L_K}{\mu_{rK}\,\mu_0\,S_K}}$$

in SERIE

ad una FORZA MAGNETOMOTRICE:

$$\boxed{e_K = \pm N_K\, i_K}$$



3) Valgono le LEGGI DI KIRCHHOFF

LKC la SOMMA DEI FLUSSI ENTRANTI IN UN NODO è NULLA

$$\boxed{\sum_K \Psi_K = 0}$$

LKT la SOMMA delle CADUTE DI TENSIONE MAGNETICA su di un PERCORSO CHIUSO è PARI ALLA SOMMA delle FORZE MAGNETOMOTRICI presenti nel percorso (pesate con segno opportuno)

FORMULE GENERALI

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_r \mu_0 S}}$$

RILUTTANZA (resistenza)

$$\boxed{e_k = \pm N_k i_k}$$

FORZA MAGNETO MOTRICE (forza elettromotrice)

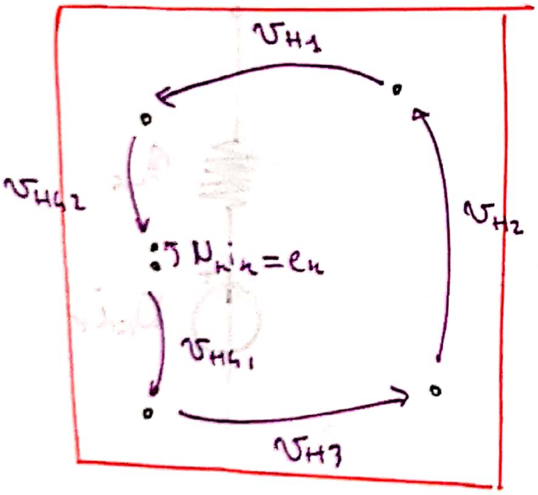
$$\boxed{v_H = \mathcal{R} \Psi}$$

TENSIONE MAGNETICA (tensione)

(FLUSSO Ψ da RELAZIONE INVERSA)

$$\boxed{\sum_k \Psi_k = 0}$$

LKC



LKT (applicazione)

Si considerano sia TENSIONE MAGNETICA che FORZA MAGNETO MOTRICE

$$\boxed{\phi_i = N_i \Psi}$$

FLUSSO CONCATENATO

$$\begin{cases} \phi_1 = a i_1 + b i_2 \\ \phi_2 = b i_2 + c i_1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}$$

MATRICE INDUTTANZA

RILUTTANZA NUCLEO CON TRAFERRO

lunghezza traferro

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{l_g}{\mu_g S} + \frac{l_t}{\mu S} = \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_t \cong \mathcal{R}_t}$$

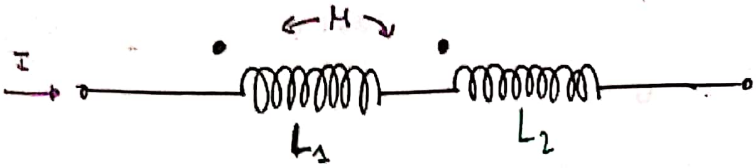
RILUTTANZA TRAFERRO

$\mathcal{R}_g << \mathcal{R}_t$

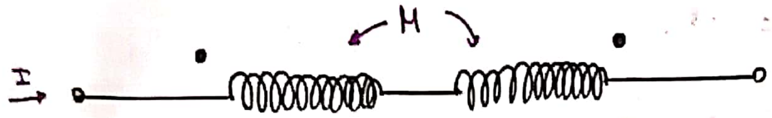
$\mu_g >> \mu_0$

nel dettaglio:

→ MUTUI INDUTTORI SERIE:



$$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M}$$



$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M}$$

→ TRIANGOLO-STELLA SEMPLIFICATO:

$$\boxed{\begin{aligned} R_Y &= \frac{R_\Delta}{3} \\ \overline{Z}_Y &= \frac{\overline{Z}_\Delta}{3} \end{aligned}}$$

→ MATRICI DOPPI BIPOLI:

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{G}}^{-1} \qquad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}'^{-1} \qquad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}'^{-1\,*}$$

(con segni diagonale secondaria invertiti)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$$

→ MATRICE ANALISI NODALE

nodi → (colonne)

nodi più correnti (generatori) (righe)

CORRENTI GENERATORI TENSIONE

incognite

TENSIONI DI NODO

$$\begin{array}{c} \\ Ⓐ \\ Ⓑ \\ \vdots \\ Ⓝ \\ L_{a_1} \\ L_{a_2} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} Ⓐ & Ⓑ & \cdots & Ⓝ & i_{E1} & i_{E2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} & & \\ \vdots & G_{22} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ G_{N1} & & & G_{NN} & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \end{array}
\begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ \vdots \\ e_N \\ i_{E1} \\ i_{E2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ \vdots \\ i_{SN} \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

CORRENTI GENERATORI DI TENSIONE

VALORE GENERATORI TENSIONE

formato da $-1, 0, 1$ (RIGA-COLONNA simmetriche)

-1 se la CORRENTE i_{Ex} entra nel NODO CORRISPONDENTE

$+1$ se esce

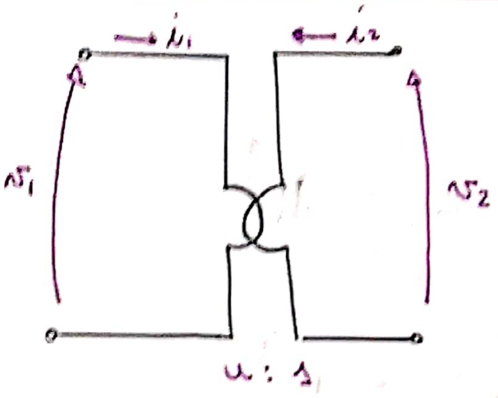
0 niente

G_{ii}: SOMMA delle CONDUTTANZE DEI ~~[illegible]~~ RESISTORI CONNESSI AL NODO ⓧ

G_{ij}: $-$(SOMMA DELLE CONDUTTANZE DEI RESISTORI CONNESSI TRA IL NODO ⓧ e il NODO ⓨ)

i_{Si}: SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI DEI GENERATORI CONNESSI AL NODO ⓧ (POSITIVO ENTRANTE)

→ TRASFORMATORE IDEALE



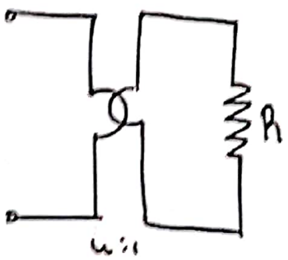
$$\begin{cases} v_1 = u v_2 \\ i_2 = -u i_1 \end{cases}$$

u : RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE

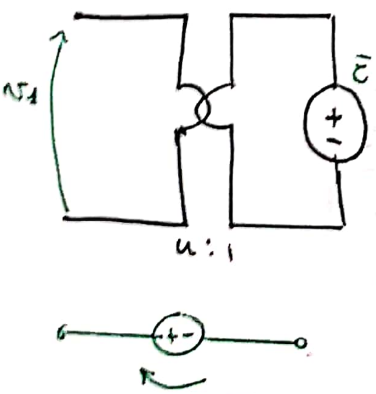
$$P_1 = -P_2$$

POTENZA ALLA PORTA i

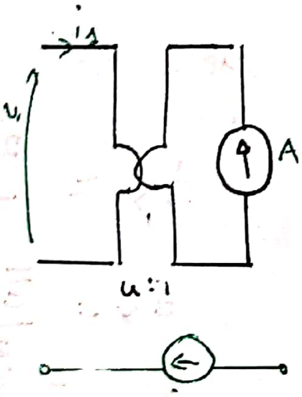
Thevenin veloci / Norton veloci



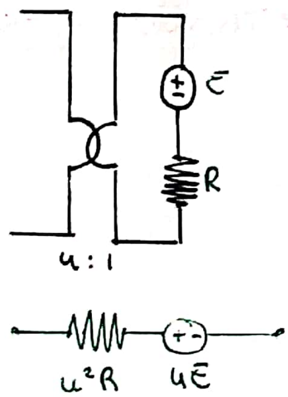
$R_{eq} = u^2 R$



$v_1 = uE$



$i_1 = A/u$



TIPOLOGIE DI ESERCIZIO

ELETTROTECNICA

1) METODO DELLA CARATTERISTICA
2) GENERATORI REALI (MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA)
3) ANALISI NODALE MODIFICATA (con e senza Supernodi)
   (SCRIVERE MATRICE SISTEMA PER ISPEZIONE VISIVA)
4) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
5) THEVENIN / NORTON
6) FORMULAZIONE / ESISTENZA CONFIGURAZIONE DOPPI BIPOLI
7) ELEMENTI DINAMICI, CALCOLO CAPACITÀ / INDUTTANZA, POTENZA ASSORBITA
8) CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE (CON INTERRUTTORE)
   [STABILITÀ, GRAFICO]
9) CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE (Metodo classico ed Equazioni di stato)
10) FASORI
11) CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE
12) POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE (Valore efficace, CONSERVAZIONE, TEOR. BOUCHEROT)
13) RIFASAMENTO
14) MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA
15) FUNZIONI DI RETE
16) PROPRIETÀ FILTRANTI DEI CIRCUITI
17) ANALISI PER PICCOLI SEGNALI
18) INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI (INDUTTANZA EQUIVALENTE)
19) CIRCUITI MAGNETICI
20) TRIANGOLO STELLA
21) TRASFORMATORE IDEALE.