Trasformata di Fourier

Data $f(t)$ definita per $-\infty < t < \infty$ se $\exists \underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jwt}\, dt}$ allora

$F(jw)$ è detta trasformata di Fourier

$\exists$ anche l'antitrasformata $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jw)\, e^{jwt}\, dw$

Data una trasformata di Laplace, quella di Fourier non è altro che

Laplace con $\underline{s = jw}$ → è Laplace valutato lungo l'asse immaginario

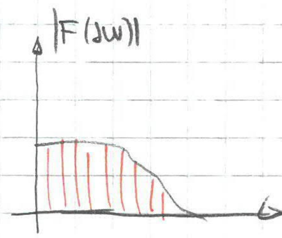
Proprietà della trasformata di Fourier

1) $F(jw) = F(s)\big|_{s=jw}$ per segnali $f(t)$ $\begin{cases} = 0 \quad \forall t \leq 0 \\ \text{trasformabile secondo Laplace} \end{cases}$

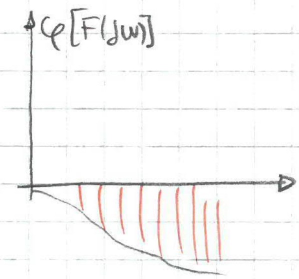
2) $F(-jw) = \bar{F}(jw)$

indicata come $\measuredangle[F(jw)]$

3) $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |F(jw)| \cos(wt + \text{fase di}[F(jw)])\, dw$



Posso vedere il segnale nel dominio del tempo come somma infinita di ~~segnali~~ coseni con un certo modulo ed una certa fase



Rappresentazione I/O → Funzione di Trasferimento

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ → $\mathcal{L}[\dot{x}] = s\,X(s) - X(0^-) = A\,X(s) + B\,u(s)$

$= s\,X(s) - A\,X(s) = B\,u(s) + x(0^-)$

$= (sI - A)\,X(s) = B\,u(s) + x(0^-)$ → moltiplico a sx e dx per $(sI - A)^{-1}$

Non è detto che $(sI - A)$ sia invertibile (Nota: è funzione matriciale e non una mat perché abbiamo s all'interno). L'inversione esiste quasi sempre.

Non è invertibile per numero n finito di valori di s → è $\underline{\text{genericamente}}$ invertibile

$X(s) = (sI - A)^{-1} B u(s) + (sI - A)^{-1} \cdot X(0^-)$ scelgo di considerare $X(0^-) = 0$ →

→ $X(s) = (sI - A)^{-1} B u(s)$ $\qquad Y(s) = C\,(sI - A)^{-1} B\, u(s) + D\, u(s)$

$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]\, u(s) = \underline{G(s)\, u(s)}$ Funzione di trasferimento del sis

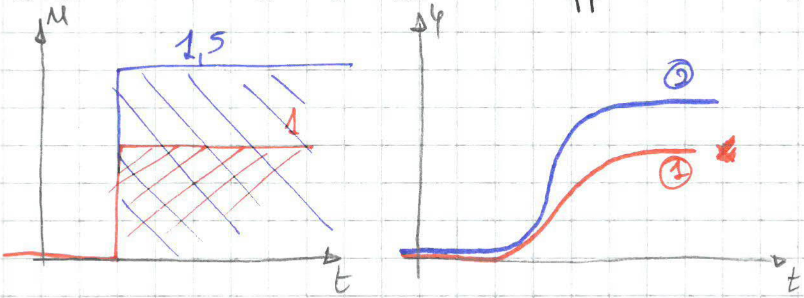
Possiamo definirla in due modi

1) $FdT = G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$

2) $FdT = G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]}$ quando la C.I è nulla

La seconda definizione può essere utile per andare ad avere risultati senza costruire il modello matematico. Devo avere C.I. nulle ed un sis lin.

Posso vedere se un sis lin applicando diversi scalini:



→ Il sis è lin se ② = 1,5 ① → se c'è una relazione lin in-out, guardandola sperimentalmente

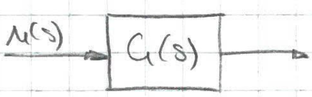
Anche se le CI ≠ 0, se il sis è AS allora le CI tenderanno in maniera asintotica a zero (movimento libero) quindi posso anche non necessariamente avere CI = 0. Perciò ho 3 passi

1. calcolo $u(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ 2. moltiplico $y(s) = G(s)\,u(s)$ 3. calcolo $\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = y(t)$

Il punto 1,3 sappiamo già farli (il 3 tramite Heavyside).

Vediamo come calcolare il pto 2:

esempio



$G(s) = \frac{1}{s+3}$ $u(t) = e^t \,\mathrm{sca}(t)$? $y(t)$.

$\mathcal{L}[e^t \,\mathrm{sca}(t)] = \frac{1}{s-1} \longrightarrow y(s) = G(s)\cdot u(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$

$\hookrightarrow \frac{1}{s}$

traslazione della trasformata

Perciò $y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} = \frac{A(s+3)+B(s-1)}{(s-1)(s+3)}$ $\begin{cases} A = --- \\ B = --- \end{cases} \rightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{t} - e^{-3t}\right)\mathrm{sca}(t)$

Vediamo che l'uscita nel tempo ha due termini che sono i modi del sis + i modi di ingresso → izy pizi

es

$\begin{cases} \dot{x} = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$ $A = 0$ $B = 1$ $C = 1$ $D = 0$ $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \longrightarrow$

$\longrightarrow 1(s-0)^{-1}\cdot 1 + 0 = \frac{1}{s}$

Nota: $\frac{1}{s}$ è sca(t) nel caso di un segnale. Nel caso dell'interpretazione di un operatore di sistema ($\int dt$), $\frac{1}{s}$ è l'integratore

es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \; 0] \quad D = [0]$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + \underbrace{\cancel{D}}_{=0} = [1 0] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \; 0] \, \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} [s \; 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}$$ ⇝ integro due volte

NB:

$\frac{1}{s^2}$ come segnale = RAMPA $\qquad \frac{1}{s^2}$ come sis = DOPPIO INTEGRATORE

Intuisco che la fdt sarà sempre scrivibile come $\frac{\text{NUMERATORE}(s)}{\text{DENOMINATORE}} = G(s)$

In cui il DEN è figlio diretto del det $(sI-A)$

ma $(sI-A)$ è legato direttamente al polinomio caratteristico *omg*

es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + u \\ y = x_2 + 5u \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \; 1] \quad D = 5$$

$$G(s) = [0 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5$$

$$= \frac{1}{s(s+2)+4} [0 1] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+2s+4} [-4 \; s] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 = \frac{-8+s+5(s^2+2s+4)}{s^2+2s+4} \overset{*}{=} \frac{5s^2+11s+12}{s^2+2s+4} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

grado $N(s) = 2$ ⇝ il grado 2 è legato al passaggio * in cui il termine noto viene moltiplicato per il $D(s)$.

Non c'è modo di ottenere grado $N(s) >$ grado $D(s)$ perché abbiamo appena visto che $N(s)$ è legato a $D(s)$. Se non avessi avuto il termine noto D, avremmo avuto $N(s)$ di grado 1

Vediamo un altro metodo risolutivo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \qquad (n \geq m)$$

è un'eq. diff di ordine n

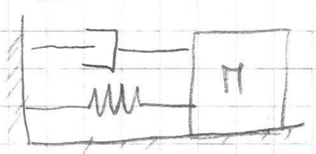
Calcolo FdT $(x(0)=0) \longrightarrow \left.\frac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=0} = 0 \quad \forall i \leq n-1$

$$a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \dots + b_0 u(s)$$

$$y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = u(s)(b_m s^m + \dots + b_0)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

es



y = posizione

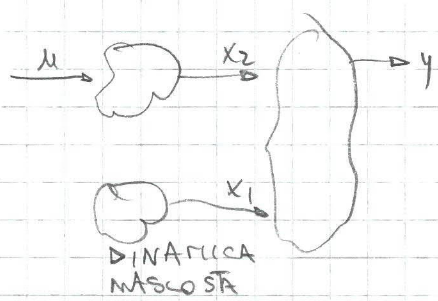
$M\ddot{y} = -Ky - c\dot{y} + u \qquad (M\ddot{y} + Ky + c\dot{y}) = u$

$(Ms^2 + cs + K)\, y(s) = u(s) \qquad \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ms^2 + cs + K}$ ⟶ trovato $G(s)$

es

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad G(s) = c(sI - A)^{-1} B + \underbrace{D}_{=0} = [1\ 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

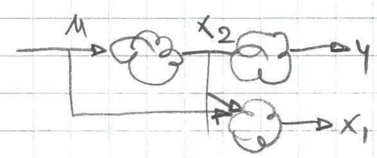
$$y = [1\ 1]\, x \qquad G(s) = \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad \longrightarrow \boxed{\text{CANCELLAZIONE}}$$



In questo caso ho una parte nascosta, che si riflette nella $G(s)$ come cancellazione di uno zero e un polo

es

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} [0\ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$



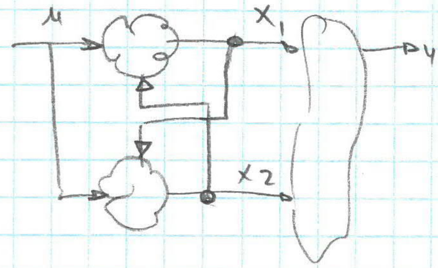
L'atto algebrico della cancellazione porta ad una perdita di informazione contenuta nella rappresentazione degli spazi di stato

Nota: se non ho cancellazioni nel calcolo della FdT, il sis è detto completamente raggiungibile e osservabile

Nell'ultimo esempio infatti, x_1 non è osservabile a causa della cancellazione.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -13 & 7 \\ -24 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} u \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -13x_1 + 7x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 = -24x_1 + 13x_2 + 9u \\ y = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$y = [2 \ -1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Così a prima vista, dallo schema, sembra di essere di fronte ad un sis perf raggiungibile, ma calcolando $G(s) = c(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1} = \frac{N(s)}{D(s)}$

C'è stata ovviamente una cancellazione, perciò:

Se e solo se c'è cancellazione $\Longrightarrow$ sis non osservabile

Dallo schema possiamo dedurre che esso non è affidabile come "test" di raggiungibilità. Aiuta a capire meglio cosa succede. L'unico test veritiero è solo mediante il calcolo di $G(s)$

Osservazioni e definizioni su FdT

1) $G(s)$ è sempre scrivibile come $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$

2) $D(s)$ può sempre essere reso monico: il 1° termine $a_n = 1$, quindi:

$$G(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} s^m + \dots + \frac{b_0}{a_n}}{(*) s^n \frac{a_{n-1}}{a_n} + \dots + \frac{a_0}{a_n}}$$

(*) il nuovo "a_n" è unitario

3) Se $m < n$ il sis è strettamente proprio $(D = 0)$

Se $m = n$ il sis è proprio $(D \neq 0)$

Se $m > n$ il sis è improprio

4) POLI di $G(s)$: i valori di s t.c. $|G(s)| = \infty$ (sono le radici di $D(s)$)] $\rightarrow$ SINGOLARITÀ

5) ZERI di $G(s)$: i valori di s t.c. $|G(s)| = 0$ (sono le radici di $N(s)$)]

6) Se $\bar{s}$ è polo di sis $\Longrightarrow$ è autovalore di A (non vale l'opposto perché ci può essere una cancellazione, posso farlo solo quando sis completamente raggiungibile)

7) Se $\bar{s}$ è autovalore di A e sis è perfettamente raggiungibile e osservabile $\Longrightarrow$ $\bar{s}$ è polo di $G(s)$

8) Cancellazioni $\rightarrow$ critiche $Re[\bar{s}] \geq 0$

$\searrow$ non critiche $Re[\bar{s}] < 0$

Stabilità interna   Stabilità Bibo (Bounded in / bounded out)

Se AS internamente stabile $\Longrightarrow$ BIBO STABILE

AS internamente stabile $\Longleftarrow$ BIBO STABILE + cancellazioni sono non critiche

INST $\Longleftarrow$ BIBO INST

INST + non ho cancellazioni $\Longrightarrow$ BIBO INST

Rappresentazione delle FdT

1) $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + \dots + a_0}$ ⤳ monico

2) $G(s) = \rho \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$ ⤳ poli e zeri in evidenza

ρ = costante di trasferimento

z_i = zeri p_i = poli

3) $G(s) = \dfrac{\mu}{s^g} \dfrac{\prod_{i=1}^{\rho}(1+sT_i)}{\prod_{i=1}^{q}(1+s\tilde{T}_i)}$ ⤳ evidenza delle costanti di tempo

g = tipo della FdT

μ = guadagno generalizzato

T_i e $\tilde{T}_i$ = costanti di tempo degli zeri e dei poli

$\tilde{T}_i = -\dfrac{1}{p_i}$ $T_i = -\dfrac{1}{z_i}$

es

$G(s) = \dfrac{4s+4}{s^2+2s-8}$ zeri: $z_1 = -1$ poli $s^2+2s-8=0$ $p_1 = 2$ $p_2 = -4$

$= \dfrac{4(s+1)}{(s-2)(s+4)} = \dfrac{4(1+s)}{-2\left(1-\frac{s}{2}\right)\cdot 4\left(\frac{s}{4}+1\right)} = \underbrace{-\dfrac{1}{2}}_{\mu:\ \text{guadagno generalizzato}} \dfrac{(1+s)}{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{4}\right)}$

es

$\dfrac{s+3}{s^2-2s} = \dfrac{s+3}{s(s-2)} = \dfrac{1}{s}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\dfrac{\left(1+\frac{s}{3}\right)}{\left(1-\frac{s}{2}\right)}$

$s \to (s-0)$

$\mu = -3/2$

$\dfrac{1}{s^g}$ ⤳ in cui g è il tipo della FdT

Cosa intendiamo per guadagno generalizzato?

$G(s) \quad \xrightarrow{u} \boxed{G} \rightarrow y \qquad u = \text{cost} \quad ?\, y$

$Y(s) = G(s)\,U(s)$ con l'ingresso costante $\rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$

$\rightarrow Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \rightsquigarrow \mathcal{L}^{-1}$ e poi $\lim_{t \to \infty} y(t) = \bar{y}$ valore finale

Posso anche non antitrasformare $\rightarrow$ teorema val. finale $\lim_{s \to 0} G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \cancel{s}$

perciò se $\exists\, \bar{y}$ allora $\bar{y} = \lim_{s \to 0} G(s) \rightsquigarrow$ valore finale dipendente da un valore specifico della FdT

Questo valore è $\underline{G(0) = \text{guadagno del sis}}$

$$G(s) = \underbrace{\frac{\mu}{s^g}}_{\text{regime}} \underbrace{\frac{\prod (1 + sT_i)}{\prod (1 + s\tilde{T}_i)}}_{\text{transitorio}} = \rho \frac{(s - z_i)}{(s - p_i)}$$

(*1) Abbiamo in questa scrittura il vantaggio di separazione tra regime e transitorio

Il tipo del sis g mi tiene conto dei poli all'origine $\rightarrow \mathrm{Re} = 0$

Realizzazione di una FdT

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{C(sI - A)^{-1}B + D} G(s) \quad I/O$$

posso tornare indietro?

Il percorso inverso è chiamato <u>REALIZZAZIONE</u>: data FdT cerco A, B, C, D che abbiano come FdT quella di partenza

- Ho infinite A, B, C, D nella realizzazione perché, da come visto in precedenza, basta avere un <u>cambio variabile</u> e ho ∞ rappres. in spazio di stato
- Inoltre ho anche il fatto della <u>cancellazione</u>, non presente in $G(s)$ quindi non posso "recuperare" l'informazione persa durante il passaggio. Infatti

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad G'(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{(s - p_i)}{(s - p_i)} \Big] \rightarrow G'(s) \text{ non cambia da } G(s)$$

Però tornando indietro, ho due rappres. diverse.

Def: Una realizzazione (A, B, C, D) si dice MINIMA se n = grado del denom di $G(s)$

Una realizzazione minima è completamente raggiungibile e osservabile $\Longleftrightarrow$ NO CANCELLAZIONI

Forme canoniche di Realizzazione

1) Forma canonica di controllo

Definisco $G(s)$ come $G(s) = \dfrac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} + d$ → termine noto

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$D_c = [d]$$

↳ è SISO

es

$$G(s) = \frac{2s^2+1}{s^2+4s+3} + 2 - 2 = \frac{2s^2+1-2s^2-8s-6}{\dots} + 2 = \frac{\overset{b_1}{-8s} \overset{b_0}{-5}}{s^2+\underset{a_1}{4s}+\underset{a_0}{3}} + \underset{D}{2}$$

2) $G(s) = \dfrac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} + d$

La forma canonica di osservabilità è

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_o = [d]$$

Per verificare: $A_o = A_c^T \quad B_o = C_c^T \quad C_o = B_c^T \quad D_o = D_c$ → Vale solo per sis SISO

↳ osservabilità → canonica

$G(s) = C_o(sI - A_o)^{-1}B_o \qquad G(s) = G(s)^T \qquad G(s)^T = [C_o(sI-A_o)B_o]^T = B_o^T\{(sI-A_o)^{-1}\}^T C_o^T =$

$= C_c(sI - A_o^T)^{-1} B_c = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c$

$$\boxed{\begin{aligned} A_o &= A_c^T \\ B_o &= C_c^T \\ C_o &= B_c^T \\ D_o &= B_c^T \end{aligned}}$$

solo per SISO

$z = Tx$
con T non singolare
vale anche per sis MIMO

→ Abbiamo una dualità

Schemi a blocchi

Abbiamo la serie/parallelo/retroazione

- **Serie** $\xrightarrow{u_1} \boxed{S_1} \xrightarrow[y_1]{u_2} \boxed{S_2} \longrightarrow y_2$ $\rightsquigarrow$ $u_1 = u \quad y_2 = y \quad u_2 = y_1$

$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \Longrightarrow G_1(s)$ $\quad \rightarrow$ per semplicità dei conti poniamo $D_1 = D_2 = 0$

$S_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow G_2(s)$

$\rightarrow$ Sostituiamo ora:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \cdot C_1 x_1 \\ y = C_2 x_2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Nuova rapp. spazio di stato in cui $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}$

Gli $\{$autovalori del sis completo$\}$ = $\{$autovalori $S_1\}$ $\cup$ $\{$autovalori $S_2\}$ (A causa della matrice A che è triangolare a blocchi)

La serie <u>non cambia</u> le proprietà di stabilità

$$\left.\begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s)\,U_1(s) \\ Y_2(s) &= G_2(s)\,U_2(s) \end{aligned}\right] \rightarrow Y_2(s) = G_2(s)\,G_1(s)\,U_1(s) \Rightarrow Y(s) = \overbrace{G_1(s)\,G_2(s)}^{G(s)}\,U(s)$$

prodotto delle FdT

$$G(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

<u>esempio</u>

$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 2u \\ y = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 \end{cases} \rightarrow G_1(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$ non ho avuto cancellaz

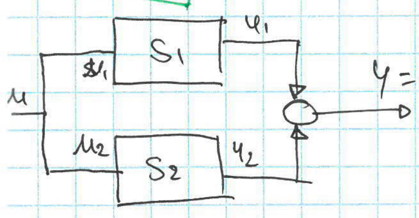
$S_2 \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ y = 1x_1 - \frac{1}{2} x_2 \end{cases} \rightarrow G_2(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+3}$ nemmeno qua ci sono cancellaz

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \cdot \frac{s-1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$\rightarrow$ cancellazione $\rightarrow$ La serie risulta in un sis non più ragg e oss.

La cancellazione mi avvisa che devo avere più info per controllare il sis perché così come la situaz. attuale le info sono tali da non poter controllare tutto in maniera chiara.

- **Parallelo**



$y = y_1 + y_2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

Come nella serie, mantengo la stabilità di A perché gli autovalori sono $A_1 \cup A_2$ grazie alla diagonalità della matrice A $\Longrightarrow$ non cambio le proprietà di stabilità

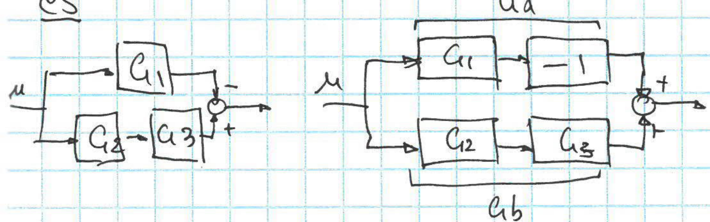
$$Y(s) = G_1(s)\, U_1(s) + G_2(s)\, U_2(s) = U(s)\, \overbrace{\left[G_1(s) + G_2(s) \right]}^{G(s)} \longrightarrow \text{somma}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s) D_2(s) + N_2(s) D_1(s)}{D_1(s) D_2(s)}$$

Per avere una cancellazione, deve esserci un termine comune agli addendi che sia poi raccoglibile e cancellabile con un termine del denominatore.

Possiamo pure combinare serie e // delle FdT:

es

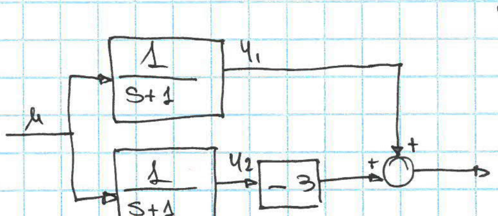


$$G_1 = \frac{3}{s+1} \qquad G_2 = \frac{s+2}{s+1} \qquad G_3 = \frac{1}{s+2}$$

$$G_a = \frac{-3}{s+1} \qquad G_b = \frac{\cancel{s+2}}{s+1} \cdot \frac{1}{\cancel{s+2}}$$ cancellaz. non critica (polo con $Re<0 \rightarrow$ no prob)

$$G = \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{-2}{s+1}$$ $\Big] \rightarrow$ il raccoglimento $(-3+1)$ ha provocato una cancellazione da qualche parte

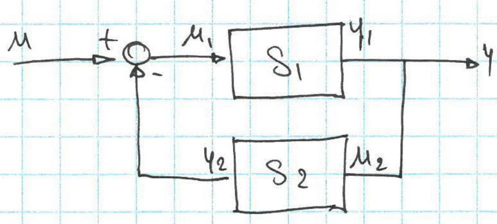
Ho perso uno stato nel sis che non è oss. nell'uscita



Ho lo stesso ingresso $\rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow$ ho l'informaz ridondante. Sto perdendo il grado di libertà corrispondente alla C.I. I due stati, all'uscita risultano uniformi, ma all'inizio potrebbero avere CI diverse.

Infatti la rappres I/O suppone (e implica) che le CI siano nulle $\rightarrow$ ecco il motivo della cancellazione anche se non è totalmente esplicita eliminando termini di N(s) e D(s) (infatti abbiamo raccolto in maniera non critica)

• Retroazione



$y = y_1 \qquad u_1 = u - y_2 \qquad u_2 = y_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - C_2 x_2) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

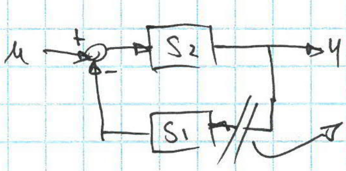
$$Y(s) = Y_1(s) = G_1 U_1(s) = G_1 (U(s) - Y_2(s)) = G_1 (U(s) - Y(s) \cdot G_2)$$

$$Y(s) = \frac{G_1}{1 + G_2 G_1} \cdot U(s) \qquad G(s) = \frac{\text{linea di andata}}{1 \pm \text{FdT dell'anello}}$$ → è la def generalizzata

Il $\oplus$ = retroazione negativa $\ominus$ = retroazione positiva] → determinate dal nodo sommatore

linea di andata = modo diretto per andare da ingresso a uscita, ignorando la retroazione

FdT ad anello = taglio l'anello chiuso (prima bisogna identificarlo) e calcolo la FdT nel pto di taglio. Così facendo non c'è più retroazione → rimangono solo serie e paralleli:



→ taglio e vedo che S_2 è in serie a S_1 → $G_1 \cdot G_2$

La FdT ad anello vale anche per sis a blocchi più complessi

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{linea di andata}}{1 + \text{FdT d'anello}} = \frac{G_1}{G_1 G_2 + 1} = \frac{N_1}{D_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}} = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2}$$

i poli sono $\bar{s}$ tc $D_1 D_2 + N_1 N_2 = 0$ → i poli non si conservano più

Non ci sono cancellazioni tra poli e zeri. Ci sono cancellazioni diverse nelle retroazioni. Queste sono passaggi algebrici che non diminuiscono l'informazione tot.

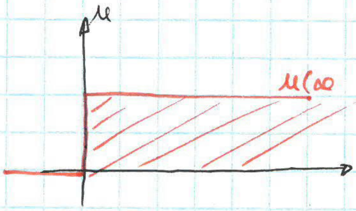
Attraverso la retroazione posso: SIS STABILI CON INSTABILI → STABILIZZAZIONE
SIS ~~INSTAB~~ STAB CON SIS STAB → generare instabilità

es

$$G(s) = G_6 \cdot \frac{G_1 \cdot (G_2 + G_3)}{1 + G_1(G_2+G_3)G_4 G_5}$$

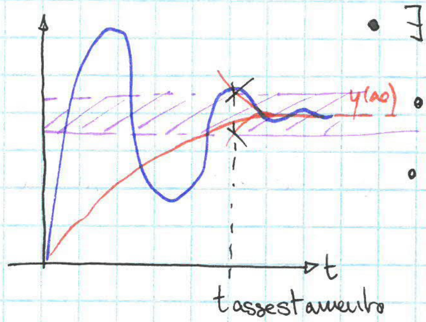
Risposte a ingressi canonici

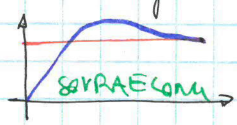
Data una $G(s)$ calcolare alcune proprietà della risposta allo scalino, senza calcolarla in forma chiusa



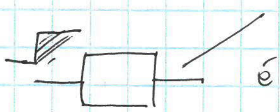
PROPRIETA'

- $y(\infty) = \lim_{t \to \infty} y(t)$
- tempo di assestamento t.c. $|y(t) - y(\infty)| \leq \varepsilon y_\infty$ $\forall t > t_{assestamento}$
- ∃ oscillazioni? Se sì: ? periodo (frequenza) ? smorzamento dell'oscillaz?
- ∃ sovraelongazioni? (supero il valore a regime e ci converge con la stessa derivata)
- ∃ sottoelongazioni? (parto sempre da sotto il regime)





1) Integratore $G(s) = \frac{\mu}{s}$



é una rampa con $y(t) = \mu \cdot t$

2) Sis con 1 polo $G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$ $\quad p = -\frac{1}{T} < 0 \iff AS$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \underbrace{G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}}}_{Y(s)} = \mu$$

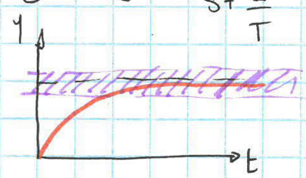
$$y(0) = \lim_{s \to \infty} \cancel{s}\, G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = 0$$

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{T}} = \frac{A\left(s+\frac{1}{T}\right) + Bs}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{A}{T} = \frac{\mu}{T} \end{cases}$$

$A = \mu \quad B = -\mu$

$y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \longrightarrow$



Calcoliamo il tempo d'assestamento $\quad y(t_a) = 0{,}99\,\mu \quad \cancel{\mu}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = 0{,}99\,\cancel{\mu}$

$t = \underbrace{-\ln(0{,}01)}_{\simeq 4{,}6} T \qquad t_a \simeq 5T$

3) Due poli reali coincidenti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2}$$

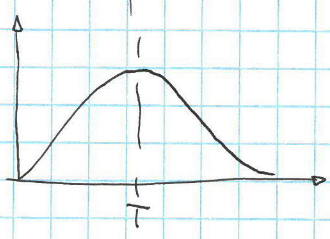
$$y(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{\mu}{(1+sT)^2} = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{\mu s}{(1+sT)^2} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} G(s) = \mu$$

Heaviside $\to$ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT} + \frac{C}{(1+sT)^2}\right] = \Big[\underbrace{\mu - \mu e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{è un sis del 1° ordine}} - \mu \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}\Big]\,\mathrm{sca}(t)$

Oltre alla parte del 1° ordine abbiamo una parte $+\mu \frac{t}{T} e^{-t/T}$, analizziamo:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{T}e^{-t/T}\right) = 0 \quad \text{per } t = T$$

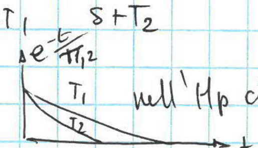
Perciò $y(t) = 1°\text{ordine} - \mu \frac{t}{T} e^{-t/T}$

4) Poli reali distinti

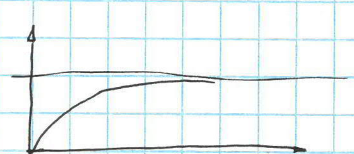
$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \qquad T_1 \neq T_2 \quad T_{1,2} > 0 \quad \mu > 0$$

$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y(\infty) = \mu \quad Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+T_1} + \frac{C}{s+T_2}$

$$y(t) = \mu\left[1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\mathrm{sca}(t)$$



nell'Hp che $T_1 > t_2$



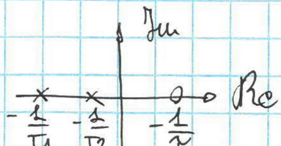
$t_a = 5T_1 \to$ cinque volte il tempo maggiore (il più lento)
la costante di
e^{-t/T_1} domina e^{-t/T_2}

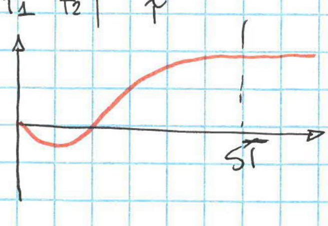
5) Poli reali distinti e uno zero

$$G(s) = \frac{\mu(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

• caso $\tau < 0$ valore init $y(0) = 0$ $\quad y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s)\cdot\frac{1}{s} = sG(s) =$

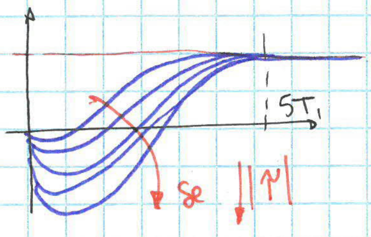
$$\stackrel{!}{=} \frac{\mu\tau}{T_1T_2}$$





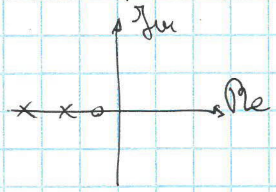
$\to$ abbiamo una sottoelongazione ma il tempo d'assestamento non cambia

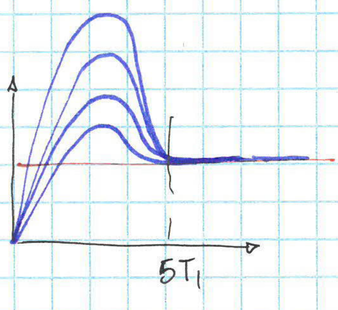
Questo é detto comportamento a fase non minima



più é alto $\tilde{T}$, più abbiamo sottoelongazione

• caso $\tilde{T} >> T_1 > T_2$

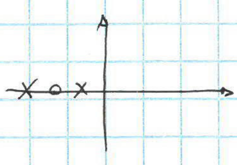


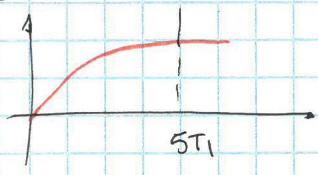


Sto giro ottengo una sovraelongazione

Più sale $\tilde{T}$, più la risposta schizza verso l'alto

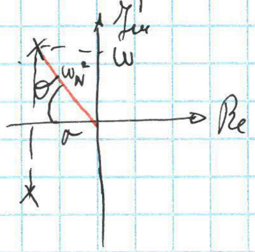
• caso $T_1 > \tilde{T} > T_2$





Questo é il caso più semplice

6) Poli complessi e coniugati



$Re[polo] = \sigma \qquad Im[polo] = \pm j\omega$

$D(s) = (s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega) =$

$= s^2 - 2\sigma s + \underbrace{(\omega^2 + \sigma^2)}_{\omega_N^2}$ $\qquad \omega_N = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2}$ pulsazione naturale

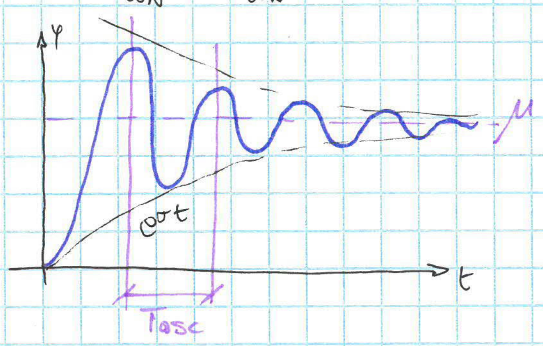
$\cos(\theta) = \xi$ smorzamento

$\sigma = -\omega_N \xi$

$\omega^2 = \omega_N^2 - \sigma^2 = \omega_N^2 - \omega_N^2 \xi^2 = \omega_N^2 (1 - \xi^2) \qquad \omega = \omega_N \sqrt{1 - \xi^2}$

$D(s) = \omega_N^2 \left(\frac{1}{\omega_N^2} s^2 + 2 \frac{\xi s}{\omega_N} + 1 \right)$

$G(s) = \dfrac{\mu}{\frac{s^2}{\omega_N^2} + \frac{2\xi s}{\omega_N} + 1}$ $\qquad y(t) = \mu \left[1 - e^{\sigma t} \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \right] sca(t)$



$T_{ASSEST} = -\dfrac{5}{\sigma}$ ($\sigma < 0$) $\qquad \sigma = -\omega_N \xi \rightarrow T_{ASS} = + \dfrac{5}{\omega_N \xi}$

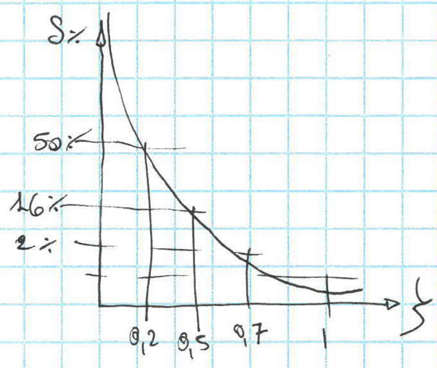
↳ cartesiano $\qquad$ ↳ polare

$T_{osc} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_N \sqrt{1 - \xi^2}}$

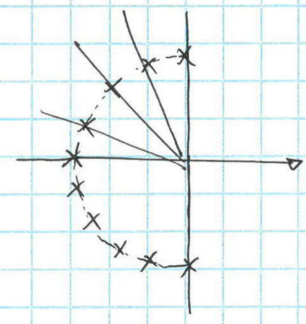
$\# osc = \dfrac{T_A}{T_{osc}} = \dfrac{5}{\cancel{\omega_N} \xi} \dfrac{\cancel{\omega_N} \sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi} = \dfrac{5}{2\pi} \dfrac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$

$S\% = 100 \, e^{-\xi\pi / \sqrt{1 - \xi^2}}$ dipende solo dallo smorzamento

↳ sovraelongazione percentuale

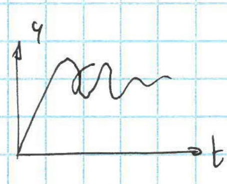


Man mano che diminuisco lo smorzamento mi avvicino sempre di più verso due poli completamente immaginari



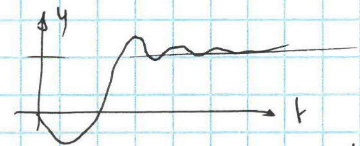
A 0,7 se lo smorzamento è maggiore le oscillazioni sono troppo lunghe per essere visibili (n° oscillaz < 1)

per $\zeta < 0{,}7$ abbiamo oscillazioni



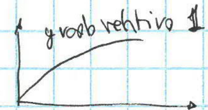
7) $G(s) = \dfrac{\mu(1+s\tau)}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} + 1}$ Se lo zero è stabile non succede nulla

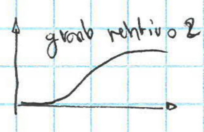
Se invece lo zero è instabile:



Approssimazione poli dominanti

Data $G(s)$ voglio trovare $\tilde{G}_c$

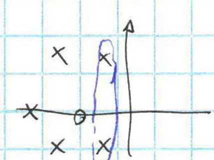




- valore finale $\tilde{G}$ = v. f. G ($\mu = \tilde{\mu}$)
- " iniziale $\tilde{G}$ = v. i. G (conservare grado relativo nel caso sia = ∅)
- t assestamento (uguali poli dominanti mantenere le costanti di tempo più lente)
- oscillaz (uguale ω_n e ζ dei poli dominanti)
- sovra/sottoelongaz (zeri a destra del polo dominante)

es:

Partiamo dalla mappa dei poli e degli zeri nel piano complesso:

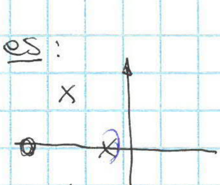


Assumo che il guadagno di quella FdT è $G(s) = \mu$ – – –

Ho grado rel. 1 quindi non serve che mi preoccupi. Lo zero non è determinante, perciò:

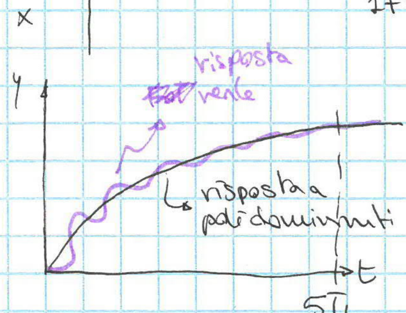
$$\tilde{G}(s) = \mu \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

es:

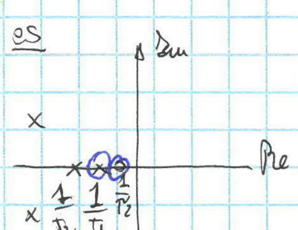


$\tilde{G}(s) = \dfrac{\mu}{1+sT_1}$ (le oscillazioni spariscono prima della fine transitorio)

es $G(s) = \dfrac{3}{(s+2)(s+5)}$ $\tilde{G}(s) = \dfrac{3/5}{(s+2)}$



es



$\tilde{G}(s) = \mu\dfrac{(1+s\tau_2)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

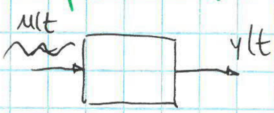
Ritardo di tempo

$\rightarrow \boxed{G_D} \rightarrow y(t)$ $y(t) = u(t - T_{RITARDO})$ $Y(s) = U(s)\, e^{-sT_{RIT}}$

$G_D = e^{-sT_{RIT}}$ posso combinarne più sis con le stesse regole:

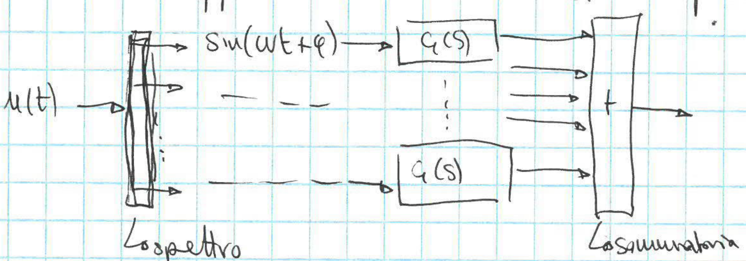
$\rightarrow \boxed{G_1} \rightarrow \boxed{RIT} \rightarrow \boxed{G_2} \rightarrow$ $G_{TOT}(s) = G_1(s)\cdot e^{-T_d s}\cdot G_2(s)$

Risposte a ingressi sinusoidali



È utile studiare questa risposta perché segnali alternati e periodici possono essere scomposti con Fourier

Vale la sovrapposiz delle cause ed effetti perché è un sis lin



Consideriamo $u(t) = e^{\gamma t}\,\mathrm{sca}(t)$ γ non è autovalore di A

$\begin{cases}\dot x = Ax + Bu\\ y = Cx + Du\end{cases}$ $\exists$ una $CI_{\hat x(0)}$ t.c. $x(t) = \hat x(0)\, e^{\gamma t}$? condiz iniz $\hat x(0)$

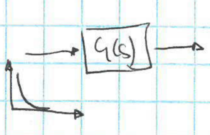
$[e^{\gamma t}]'$

$\dot x(t) = \hat x(0)\cdot \gamma \cancel{e^{\gamma t}} = A\hat x(0)\cancel{e^{\gamma t}} + B\cancel{e^{\gamma t}}$ $(\gamma I - A)\hat x(0) = B$

Se $\hat x(0) = (\gamma I - A)^{-1}B$ allora è vero che $x(t) = \hat x(0)\, e^{\gamma t}$

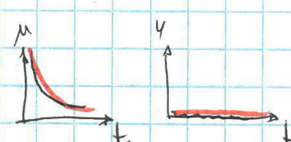
$y = Cx + Du = C(\gamma I - A)^{-1}B e^{\gamma t} + D e^{\gamma t} = [C(\gamma I-A)^{-1}B + D]\, e^{\gamma t}$ ⇒ è la FdT valutata per $s=\gamma$ ⇒ $= G(\gamma)\, e^{\gamma t}$

Vediamo il significato degli zeri:



$\bar\gamma$ zero di $G(s)$ $u(t) = e^{\bar\gamma(t)}$ $\exists!\ \hat x(0) = C(\gamma I - A)^{-1}B$

$y(t) = G(\bar\gamma)\, e^{\gamma t}$ in cui, per def, $G(\bar\gamma) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$



Se do in ingresso un exp che ha come coefficiente lo zero, in uscita non si vede niente

Questo è il potere bloccante degli zeri

Ho ora l'ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ $\tilde u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j\,\mathrm{sen}\,\omega t$ mi aspetto che l'uscita sia $\tilde y(t) = \tilde y_1 + j\tilde y_2$ dove $\tilde y_1$ = uscita di $G(s)$ con ingresso $\cos(\omega t)$
$\tilde y_2$ = 〃 〃 〃 〃 〃 $\sin(\omega t)$

Perciò se ho $u(t) = \sin(\omega t)$ allora $y(t) = \mathrm{Im}[\tilde y(t)]$

1) considero $\tilde{u} = e^{j\omega t}$

2) scelgo $\hat{x}(0) = (j\omega \cdot I - A)^{-1} B \Rightarrow \tilde{y}(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}$ $\quad G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \measuredangle (j\omega)}$

3) $y(t) = \Im m[\tilde{y}(t)] = \Im m\left[|G(j\omega)| e^{j\measuredangle[G(j\omega)]} \cdot e^{j\omega t}\right]$

$\overset{!}{=} |G(j\omega)| \Im m\left[e^{j\measuredangle[G(j\omega)]} \cdot e^{j\omega t}\right] = |G(j\omega)| \Im m\left[e^{j\{\omega t + \measuredangle[G(j\omega)]\}}\right] =$

$= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle[G(j\omega)])$

Teorema della risposta in frequenza

Hp ① Sia $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$

② (A, B, C, D) sis LTI t.c. $j\omega$ non sia autovalore di A

$\Downarrow$

$\exists!\ x(0) = (j\omega I - A)^{-1} B$ $\quad y(t) = Y \sin(\omega t + \psi)$ dove $Y = |G(j\omega)| U$ e $\psi = \varphi + \measuredangle[G(j\omega)]$

$G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \overset{\Delta}{=}$ Risposta in frequenza del sis (R.F)

corollario se il sis é AS (A é AS) $\Rightarrow y(t) \to Y \sin(\omega t + \psi)$ $\forall x(0)$

commenti:

1) $G(j\omega)$ funzione complessa di variabile reale ω

2) $G(s)$ f complessa di var complessa

3) R. F é def per tutti i sis lin.

es $G(s) = \dfrac{1}{1 + sT}$ $\quad G(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega T}$ $\quad$ modulo $|G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$

se $\omega^2 T^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)| \simeq 1$

se $\omega^2 T^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)| \sim \dfrac{1}{\omega T}$

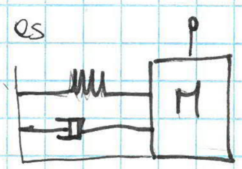
$u(t) = \sin(\omega t)$

$\measuredangle[G(j\omega)] = -\measuredangle[1 + \omega T] = -\mathrm{atg}\left(\dfrac{\omega T}{1}\right)$

$\omega^2 T^2 \ll 1 \to 0$

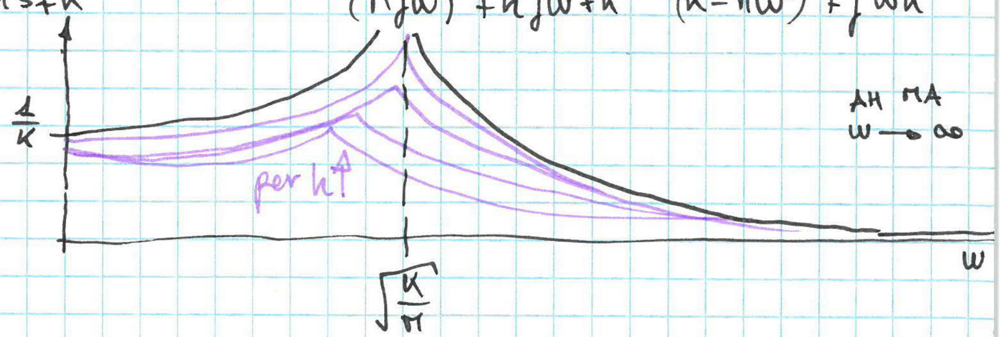
$\omega^2 T^2 \gg 1 \to \frac{\pi}{2}$

es



$G(s) = \dfrac{1}{Ms^2 + hs + K}$ $\quad G(j\omega) = \dfrac{1}{(Mj\omega)^2 + hj\omega + K} = \dfrac{1}{(K - M\omega^2) + j\omega h}$

$|G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + (h\omega)^2}}$



Questo quando applico una forza sinusoidale

Il fenomeno é detto di risonanza

Ripasso della teoria

- definizione del problema di controllo
  - controllo A.A: modello matematico, tempi risposta, disturbi
  - controllo A.C: robustezza, stabilizzazione in retroazione

- Classificazione dei sis: statico / dinamico (con def variabile di stato)
  - SISO / MIMO
  - ordine
  - lin / non lin
  - temp.var / tempinv
  - proprio / strett. proprio

SIS DIN → def movimento, calcolo → $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$

→ exp di matrice
- A diagonale
- A diagonalizzabile $T_D^{-1}\left[\ddots\right]T_D$
- A triangolare / tri. a blocchi / ~~non diagonalizzabile~~

→ Rappresentazioni equivalenti $z = Tx$ con $\det T \neq 0$

→ linearizzazione

STABILITA' → definizioni (STAB, INST, AS) → stabilità alla Lyapunov o interna

→ SIS LIN → 3 teoremi $\forall \lambda_i: \Re e(\lambda_i) < 0 \iff AS$

→ senza calcolo autovalori
- Routh
- per 2° ordine $\alpha_0 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 = 0$: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ concordi e > 0

STAB per i non lin: stabilità degli <u>equilibri</u>
- linearizzazione
- teorema di Lyapunov

- trasformata di Laplace
  - definizione $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$
  - proprietà: linearità / traslaz. nel tempo / derivaz nel tempo / integrale nel tempo

- trasformate notevoli:
  - $\dfrac{1}{s^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, sca(t)$ (impulso, rampa, scalino)
  - $\dfrac{1}{s-a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{a(t)}\, sca(t)$
  - $\dfrac{1}{(s-a)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, sca(t)$
  - $\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \rightarrow e^{at} \sin(\omega t)\, sca(t)$
  - $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \rightarrow e^{at} \cos(\omega t)\, sca(t)$

- teorema V.I, V.F

- antitrasformate con Heavyside: poli semplici / multipli / complessi coniugati / non strettamente proprio

FdT: def: $\to$ calcolo di (A,B,C,D)
$\to$ rapporto tra trasformate di Laplace $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$
$\to$ osservabilità e controllabilità $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
se ci sono cancellaz $\to$ non oss e controllabile
se no $\to$ perfettamente oss e controll

cancellaz $\to$ critiche
$\to$ non critiche

Stabilità FdT e interna

- Rappresentaz. di FdT: polinomi estesi / singolarità o costanti di tempo raccolte

- Calcolo risposte allo scalino: integratore / singolo polo / poli multipli coincidenti / poli c.c / effetto degli zeri
$\to$ approx poli dominanti: t. ass / v.f / V.i / oscillaz sovra-sotto elong
oscillaz $\to$ periodo / n° oscillaz / ampiezza relativa del picco

- Risposta in frequenza
  - teorema (corollario) $\leftarrow$ NB il corollario
  - effetto bloccante degli zeri
  - calcolo $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ $\to$ modulo $\to$ fase

es tipico "dato G(s) A.S, calcolare l'uscita a regime con $u(t) = \sin(\omega t)$"

- Schemi a blocchi: serie / parallelo / retroazione stabilità

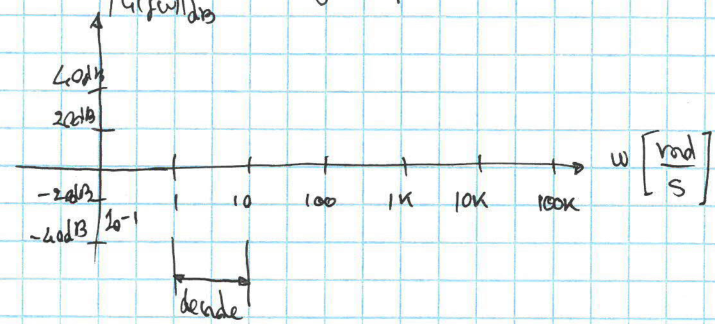
Rappresentazione grafica risposta in frequenza

$$G(s) \xrightarrow{s = j\omega} G(j\omega) \begin{cases} \text{modulo} \\ \text{fase} \end{cases} \Bigg] \to \text{al variare di } \omega \begin{cases} \text{Diagramma di bode} \\ \text{Diagr. polare} \end{cases}$$

Diagramma di Bode del modulo

$$|G(j\omega)| \to 20 \log_{10} |G(j\omega)| = |G(j\omega)|\Big|_{dB}$$

→ ω é considerato su scala log



Se $|G(j\omega)| = 1 \to |G(j\omega)|\Big|_{dB} = 0\,dB$

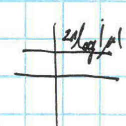
$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod(1+s\tilde{T}_i) \prod\left(1 + \frac{\beta_i}{\alpha_i}s + \frac{s^2}{\alpha_i^2}\right)}{\prod(1+sT_i) \prod\left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{N_i}}s + \frac{s^2}{\omega_{N_i}^2}\right)} \qquad G(j\omega) = \mu \frac{\prod(1+j\omega\tilde{T}_i)}{\prod(1+j\omega T_i)} \frac{\prod\left(1 + \frac{2\beta_i}{\alpha_i}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_i^2}\right)}{\prod\left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{N_i}}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{N_i}^2}\right)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|s^g|} \frac{\prod|1+j\omega\tilde{T}_i|}{\prod|1+j\omega T_i|} \frac{\prod\left|1 + \frac{2\beta_i}{\alpha_i}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_i^2}\right|}{\prod\left|1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{N_i}}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{N_i}^2}\right|}$$

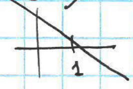
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu| - 20\log_{10}|j\omega|^g + \sum 20\log_{10}|1+j\omega\tilde{T}_i| - \sum 20\log_{10}|1+j\omega T_i| +$$
$$+ \sum 20\log_{10}\left|1 + \frac{2\beta_i}{\alpha_i}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_i^2}\right| - \sum 20\log_{10}\left|1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{N_i}}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{N_i}^2}\right|$$

Casi

1) $G(j\omega) = \mu \qquad |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu|$ é una retta $\begin{cases} \text{se } \mu > 1 \quad |G(j\omega)|_{dB} > 0 \\ \text{se } \mu < 1 \quad |G(j\omega)|_{dB} < 0 \end{cases}$

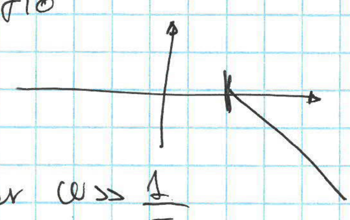


2) $G(s) = \frac{1}{s^g} \to G(j\omega) = \frac{1}{|j\omega|^g} \qquad |G(j\omega)|_{dB} = -20 \cdot g \log_{10}|j\omega|$

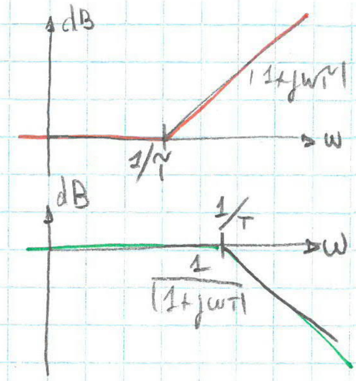


3) $G(s) = \frac{1}{1+sT} \to |G(j\omega)|_{dB} = +20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$

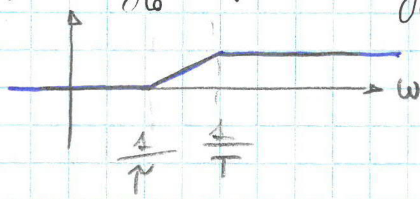
$$|G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0\,dB \text{ per } \omega \ll 1/|T| \\ -20\log_{10}|\omega T| = -20\log_{10}|\omega| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{T}\right| \text{ per } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



4) $G(s) = \frac{1+s\tilde{T}}{1+sT}$ $\qquad |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|1+j\omega\tilde{T}| - 20\log_{10}|1+j\omega T|$



Sommando i due grafici:

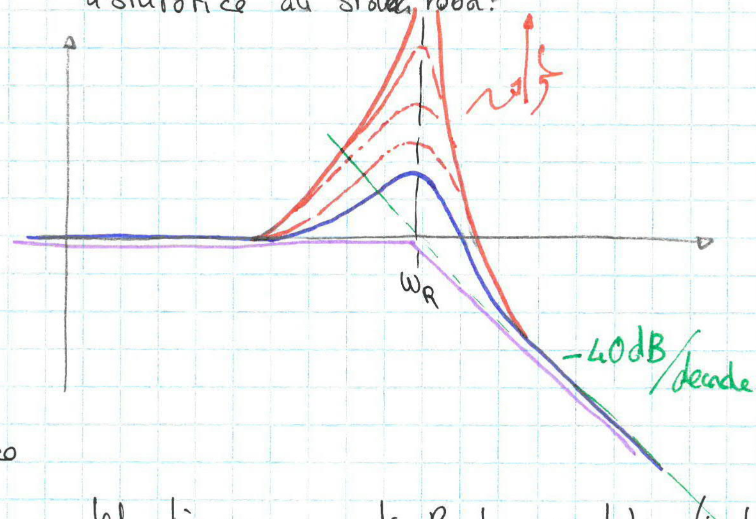


5) $G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_N^2} + \frac{2\xi s}{\omega_N} + 1}$ $\qquad G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_N}\cdot j}$

$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_N^2}}$ Vediamo il comportamento asintotico di ~~stam~~ sta roba:

$\omega \to 0 \qquad |G(j\omega)|_{dB} = 0\,dB$

$\omega \to \infty \qquad |G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right) = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)$



① $\omega_R = \omega_N\sqrt{1-2\xi^2}$

② $|G(j\omega_R)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$ → picco

Per ξ elevate, posso mantenere l'approx del diagramma di Bode asintotico (in lilla)

①, ② rivelano che non è vero che c'è un picco di risonanza sempre, infatti

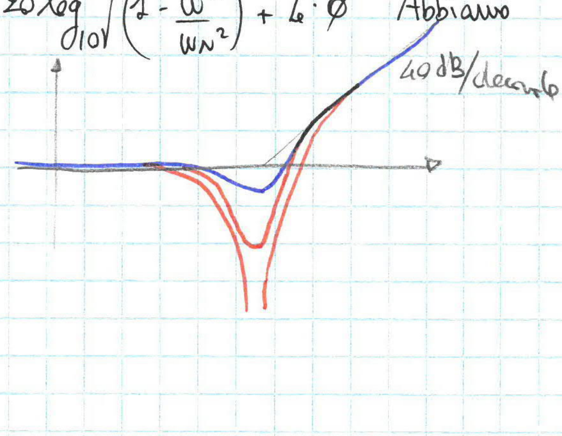
La risonanza è presente se $1-2\xi^2 > 0 \implies \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,70$

Se lo smorzamento è elevato, non ottengo risonanze e quindi il diag. Bode asintotico è un'ottima approx. Man mano che $\downarrow\xi$, la risonanza viene enfatizzata.

Cosa succede al modulo quando $\xi = 0$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right)^2 + 4\cdot\cancel{0}}$ Abbiamo un asintoto verticale

6) $G(s)$ = zeri complessi e coniugati ⇒ antirisonanza

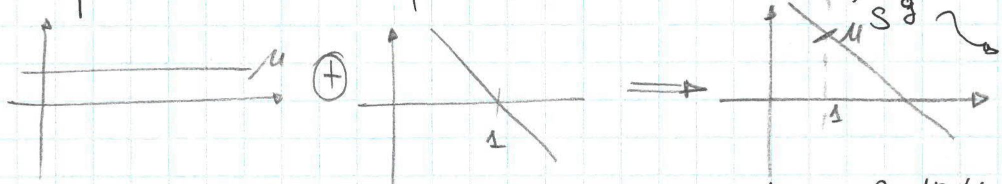
Il comportamento è esattamente analogo.



Regole di tracciamento del modulo dei diagrammi di Bode

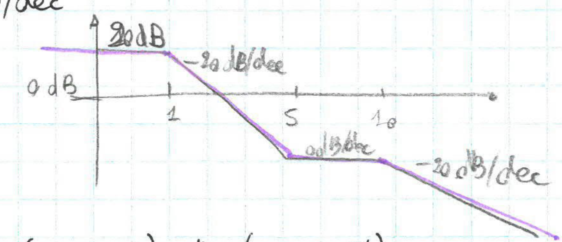
1) G deve essere scritta come (*) $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod(1+s\tau_i)}{\prod(1+sT)} \frac{\prod\left(1+2\frac{\beta_i}{\alpha_i}s+\frac{s^2}{\alpha_i^2}\right)}{\prod\left(1+2\frac{\zeta}{\omega_N}s+\frac{s^2}{\omega_N^2}\right)}$

2) Si parte dalle basse frequenze, $\omega \to 0$. Abbiamo $\frac{\mu}{s^g}$ → tracciare $|\mu|_{dB}$
→ tracciare $\frac{1}{s^g}$ → $-20\log\omega$



3) Incremento ω → se incontro zero ⇒ guadagno 20 dB/dec
→ se incontro polo ⇒ perdo 20 dB/dec

es:
$G(s) = 10\frac{(1+0{,}2s)}{(1+s)(1+0{,}1s)}$ zero in = -5 rad/s
poli in = -1 rad/s, -10 rad/s



Regole di tracciamento della fase

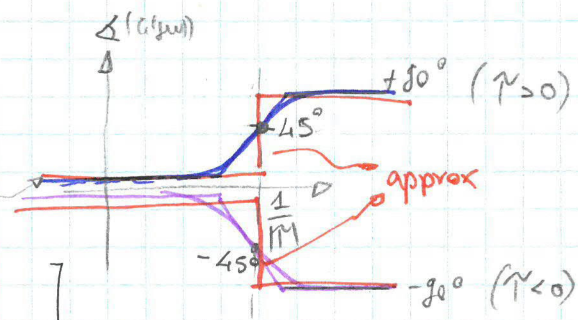
Data G(s) (*), la fase è $\angle[G(j\omega)] = \angle|\mu| - \angle|j\omega|^g - \sum\angle(1+j\omega T_i) + \sum\angle(1+j\omega\tau_i)$
$- \sum\angle\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_N}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right) + \sum\angle\left(1+\frac{2\beta_i}{\alpha_i}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_i^2}\right)$

guadagno DC
1) $\angle(\mu)$ 0 se $\mu>0$

± 180 se $\mu<0$

polo origine
2) $\angle\left(\frac{1}{j\omega^g}\right) = -\angle(j\omega)^g = -g\angle(j\omega) = -90^\circ g$

zero
3a) $\angle(1+j\omega\tau_i) = atg(\omega\tau)$
zero



approx $\angle(1+j\omega\tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } \omega = \frac{1}{|\tau|} \\ 90^\circ & \text{se } \tau>0 \\ -90^\circ & \text{se } \tau<0 \end{cases}$ per $\omega > \frac{1}{|\tau|}$ → approx ad angolo retto

polo
polo
3b) $\angle\frac{1}{(1+j\omega T)} = -\angle(1+j\omega T)$ opposto dello zero

Possiamo costruire una tabella:

	Re<0	Re>0
polo	-90°	$+90^\circ$
zero	$+90^\circ$	-90°

polo comp. coniug

4) $\measuredangle \left[\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_N} j - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}} \right] = - \measuredangle \left[1 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_N} j - \frac{\omega^2}{\omega_N^2} \right] = - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_N}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}} \right) = -\operatorname{arctan} \left(\frac{Re}{Im} \right)$

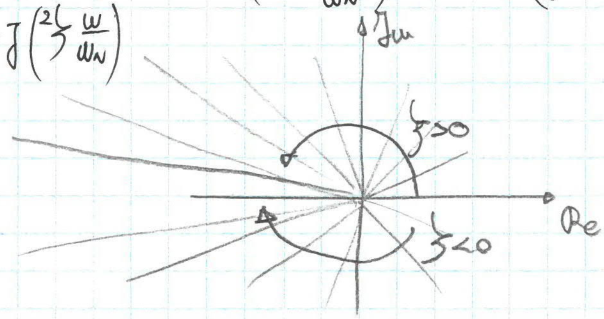
$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right) + j\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_N}\right)$

Però vogliamo ragionare graficamente

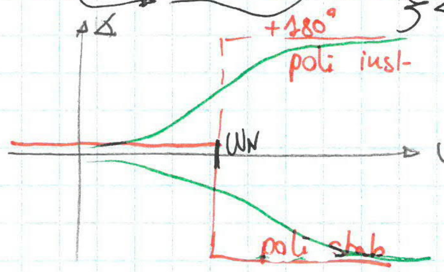
$\omega = 0 \quad \measuredangle(\ldots) = 0$

$\omega = \infty \quad \measuredangle(\ldots) = \cancel{-180°}$

	$Re < 0$	$Re > 0$
polo c.c	$-180°$	$+180°$
zero c.c	$180°$	$-180°$



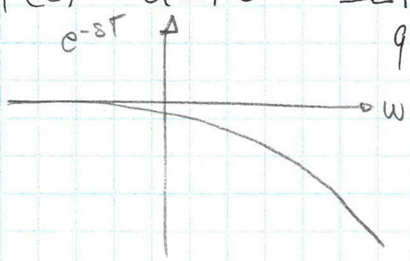
$s^2 + 2\zeta \omega_N s + \omega_N^2$ se $\zeta > 0$ allora $Re < 0$; $\zeta < 0$ allora $Re > 0$ → Parlare di ζ o di Re è equivalente

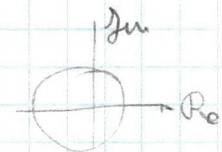


Ritardo e^{-sT}

$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$ $\quad F(s) = G(s)\, e^{-sT}$ ⇒ il diagramma di Bode del modulo sarà quello di $G(s)$

$\measuredangle e^{-j\omega T} = -\omega T$



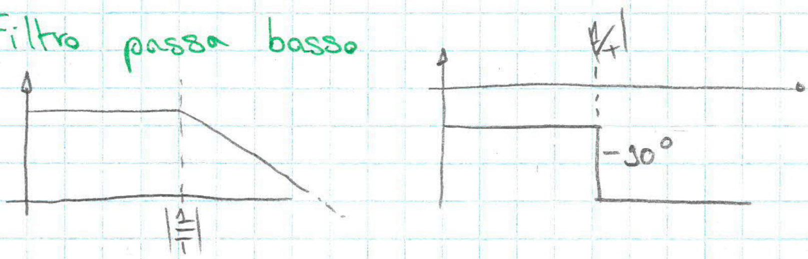


Def sis a fase minima

Essi sono sis: ① AS, ② tutti gli zeri hanno $Re < 0$, ③ non ci sono ritardi.

Dato il diagramma del modulo, posso ricostruire quello delle fasi solo per questi sis.

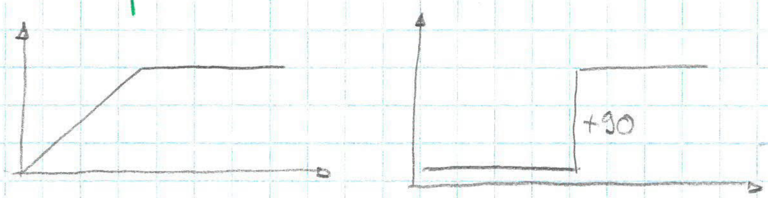
Filtro passa basso



1 polo

Vengono preservate le variazioni "lente" del segnale. Le armoniche più ad alta freq vengono attenuate.

Filtro passa alto



zero nell'origine + polo

Filtro passa banda

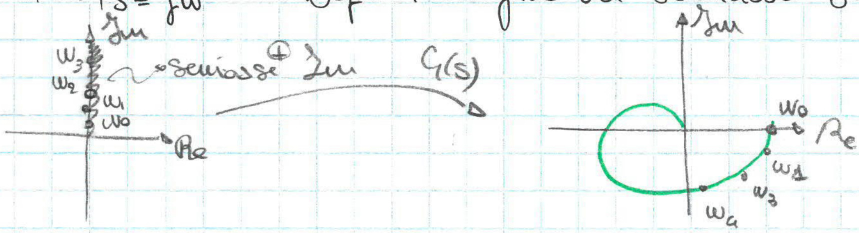
É una serie tra passa basso e passa alto: zero nell'origine + 2 poli

Filtro stop banda

É l'inverso del BP, es $G(s) = \dfrac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$] → filtro ~~notch~~

Rappresentazione grafica dei diagrammi polari

$G(s)\big|_{s=j\omega}$ Def: l'immagine del semiasse $\Im m$ positivo attraverso $G(s)$



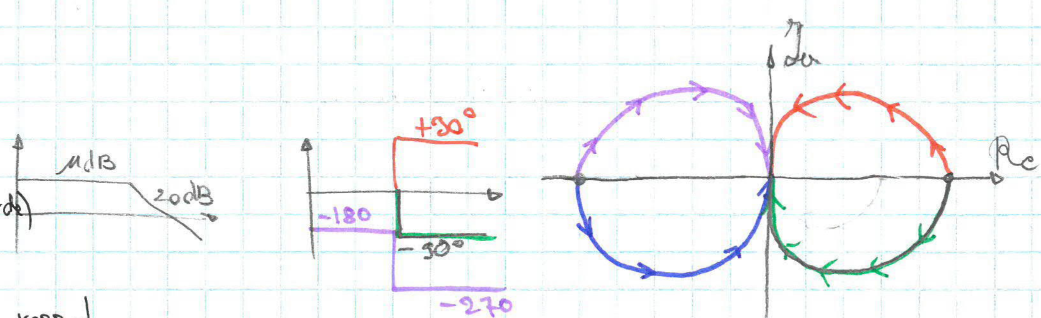
Unendo tutti gli ω ottengo una curva, $\omega \in [0, \infty]$

Def é la curva $G(j\omega)$ sul piano complesso, punteggiata in ω (traccio un punto per ogni variazione di ω)

Il diagramma polare contiene le stesse info del diagramma di Bode.

esempi:

$G(s) = \dfrac{\mu}{1+sT}$



caso 1) $\mu > 0$ $T > 0$ (in verde)

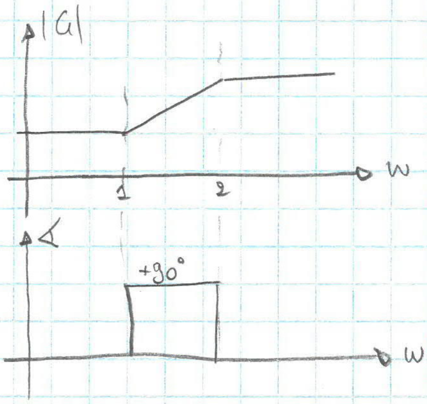
caso 2) $\mu > 0$ $T < 0$ (in rosso)

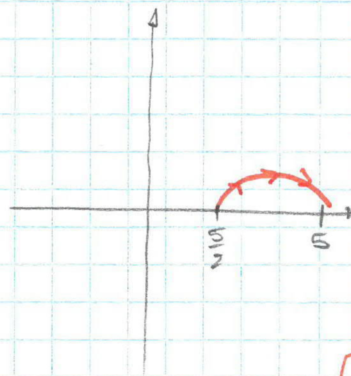
caso 3) $\mu < 0$ $T > 0$ (lilla)

caso 4) $\mu < 0$ $T < 0$ (blu)

es

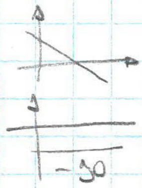
$G(s) = 5\,\dfrac{s+1}{s+2}$

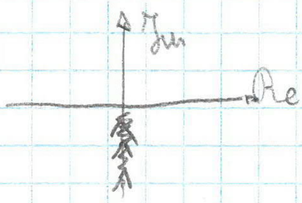




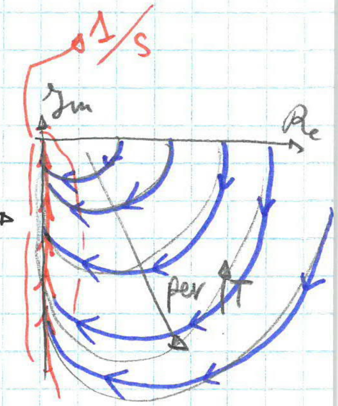
es

$G(s) = \dfrac{1}{s}$



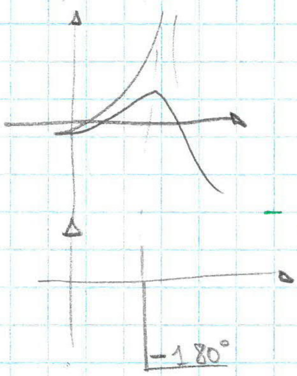


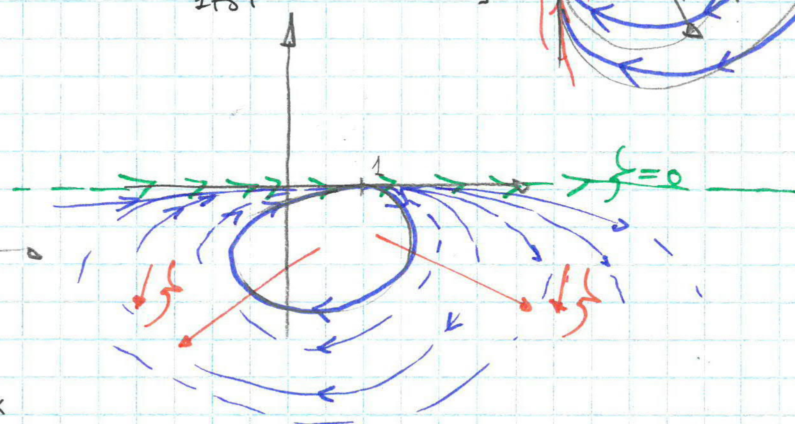
é il semiasse perché é come se fosse un polo estremizzato
$G(s) = \dfrac{T}{1+sT}$ con $T \to \infty$



es

$G(s) = \dfrac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_N}s + \frac{s^2}{\omega_N^2}}$



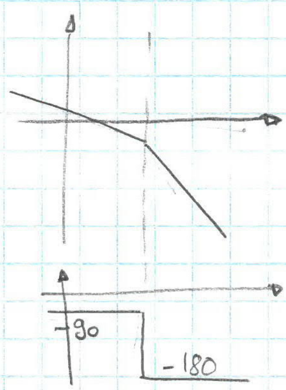


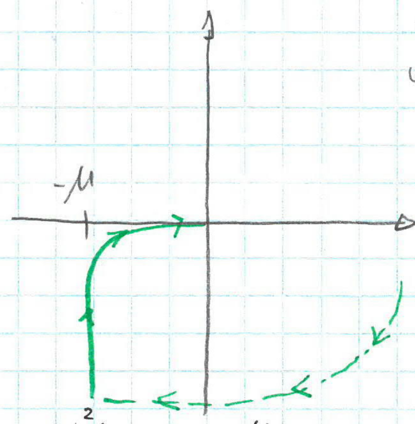
Se $\zeta = 0$ il diagramma polare é l'asse x

es

$G(s) = \dfrac{\mu}{s(s+1)}$ $\mu > 0$ $|\mu| < 1$

Polo con Re=0 → non posso basarmi solo sui diag. Bode





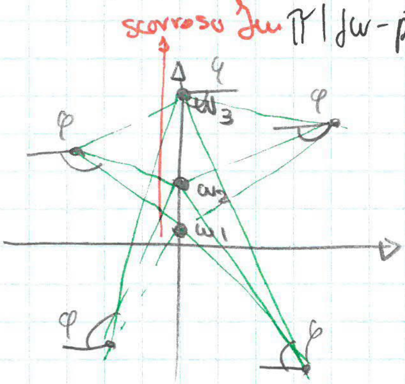
$\omega \to \infty$ $\varphi = -180°$
$|\cdot| = 0$
$\omega \to 0$ $\varphi = -90°$
$|\cdot| \to \infty$

$G(j\omega) = \dfrac{\mu}{j\omega(j\omega+1)} = \dfrac{\mu}{-\omega^2 + j\omega} \cdot \dfrac{-\omega^2 - j\omega}{-\omega^2 - j\omega} \to G(j\omega) = \underbrace{\dfrac{-\omega^2\mu}{\omega^4+\omega^2}}_{Re} + j\,\underbrace{\dfrac{-\mu\omega}{\omega^4+\omega^2}}_{Im}$

$\lim_{\omega\to 0} Re[G(j\omega)] = -\mu$ — la parte reale rimane fissa a $-\mu$ mentre

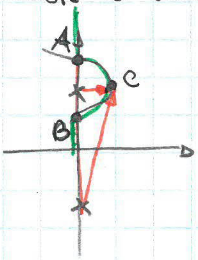
$\lim_{\omega\to 0} Im[G(j\omega)] = -\infty$ — la parte immaginaria tende a $-\infty$

$M = |G(j\omega)| = |K| \dfrac{\prod |j\omega - z_i|}{\prod |j\omega - p_i|}$ $\qquad \varphi = \measuredangle[G(j\omega)] = \varphi_K + \sum \measuredangle(j\omega - z_i) - \sum \measuredangle(j\omega + p_i)$



Punto un ω sull semiasse ⊕ di Im, vedo la lunghezza di tutti i vettori da ogni polo e zero e sommo le fasi per zeri, sottraggo fasi per poli, sommo invece le lunghezze dei vettori per avere il modulo totale del diagramma. Vediamo se c'è una singolarità posta sull'semiasse Im ⊕:

Questo è detto metodo dei vettori, es: poli compl. coniugati, dobbiamo passare attorno alla singolarità per vedere $\omega \to +\infty$



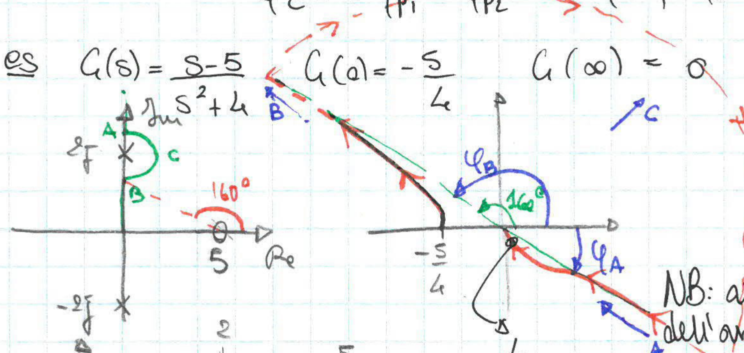
Per passare la singolarità, la regola è che si passa sempre a destra

$\varphi_B = -\varphi_{p_1}^B - \varphi_{p_2}^B = -(-90°) - 90° = 0°$

$\varphi_A = -\varphi_{p_1}^A - \varphi_{p_2}^A = -180$ perché il cerchietto è di raggio infinitesimo, per cui C si avvicina sempre di più verso asse Im

$\varphi_C = -\varphi_{p_1}^C - \varphi_{p_2}^C = -(0°) - (90°) = -180°$

es $G(s) = \dfrac{s-5}{s^2+4}$ $\quad G(0) = -\dfrac{5}{4}$ $\quad G(\infty) = 0$



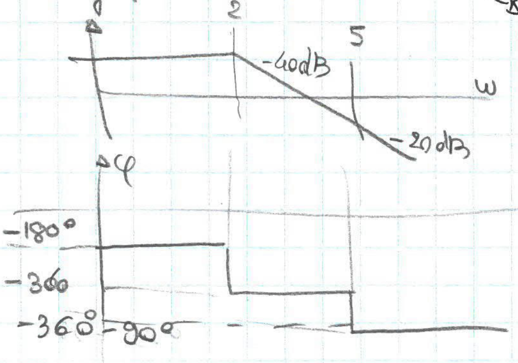
$\varphi_B = \varphi_{z_1}^B - \varphi_{p_1}^B - \varphi_{p_2}^B = \text{arctg}\left(\frac{-2}{5}\right) - (-90) - (-90) = 160°$ (160°)

$\varphi_C = \varphi_{z_1}^C - \varphi_{p_1}^C - \varphi_{p_2}^C = \text{arctg}\left(\frac{-2}{5}\right) - (90) - (90) = -20°$ (160°)

$\varphi_A = \varphi_{z_1}^A - \varphi_{p_1}^A - \varphi_{p_2}^A = \text{arctg}\left(\frac{-2}{5}\right) - (0°) - (90) = 70°$ (160°)

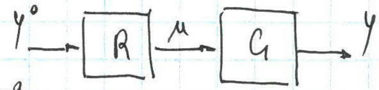
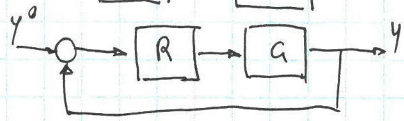
NB: attento all'uso della calcolatrice per il calcolo dell'arcotangente

tangente nell'origine pari a -90° (vedi la fase finale in Bode)



I

Introduzione ai sistemi di controllo (sis LTI, eventualmente NL linearizzati)

- Anello aperto 
- Anello chiuso 

1) Requisiti primari

- Stabilità (asintotica)
- Precisione statica $\lim_{t \to \infty} y(t) = y_0$
- Precisione dinamica $y(t) = y_0$ durante transitori

2) Requisiti secondari: moderazione nell'azione di controllo (usare sis sovradimensionati per il controllo è praticamente inutile e costoso, minimo sforzo massimo rendimento)

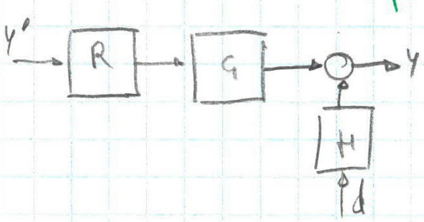
- robustezza del sis di controllo (giusto comportamento anche con incertezza di G): garanzia delle proprietà (requisiti primari) anche in presenza di incertezze sul modello

3) Problema di analisi: dati R, G $\Rightarrow$ valutare i requisiti (detti anche proprietà) che la caratterizzano

4) Problema di sintesi: contrario dell'analisi, ovvero dato G si progetta e sintetizza R

il progetto di R può non essere unico a causa delle sensibilità in gioco o metodi diversi.

Controllo ad anello aperto



$\frac{y}{y_0} = RG \underset{\uparrow \text{ideale}}{=} 1 \Rightarrow y = y_0 \rightsquigarrow$ è un filtro "passa tutto" idealmente

$\frac{y}{d} = H \underset{\uparrow \text{idealmente}}{=} 0 \rightsquigarrow$ idealmente si vuole avere H come filtro "passa niente"

Se $RG = 1 \Rightarrow R = G^{-1} \rightsquigarrow$ nella pratica ci sono problemi di realizzazione di ciò

Problema 1) Cancellazioni illecite (critiche)

$G(s) = \frac{s+1}{s-1} \Rightarrow$ se $R = G^{-1}$ $R = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow RG = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{s-1}} \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{s+1}} = 1$

canc. non critica

cancellazione critica

Non si può fare la cancellazione critica perché comporta instabilità, il pezzo del sis diventa non osservabile.

Oss: qualunque G(s) instabile non può essere controllato in Anello Aperto, perché questo controllo non riuscirà mai a stabilizzare un G instabile

Problema 2) Realizzabilità di R

$G(s) = \frac{10(s+1)}{(2s+1)(0,1s+1)} \Rightarrow R = \frac{0,1(2s+1)(0,1s+1)}{(s+1)}$

Non abbiamo cancellazioni critiche ma n° zeri > n° poli $\Rightarrow$ sis improprio ovvero non può essere realizzato nella realtà

Possiamo avere solo sis G propri

Allora andiamo a cercare una FdT che non costituisca un filtro passa tutto, un quasi:

⇒ rendo propria e realizzabile R, per ~~esempio~~ esempio aggiungendo un polo ad alta frequenza (tutto quello che succede a HF è praticamente frutto di ciò che succede a LF, se pongo un polo HF non influenzo il sis più di tanto. Se fosse LF potrei avere risultati catastrofici perché influenzo praticamente tutto il sis, si sceglie il male minore)

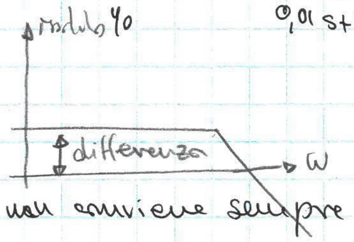
posso per esempio aggiungere un polo una decade dopo l'ultima singolarità, se prendiamo l'ultimo <u>es</u> abbiamo $R = G^{-1}\cdot\frac{1}{0{,}01\,s+1} \Rightarrow \frac{y}{y_0} = R\cdot G = \frac{1}{0{,}01\,s+1}$

Non abbiamo più un filtro passa tutto ma è un filtro passa basso.

Problema 3) Scarsa robustezza

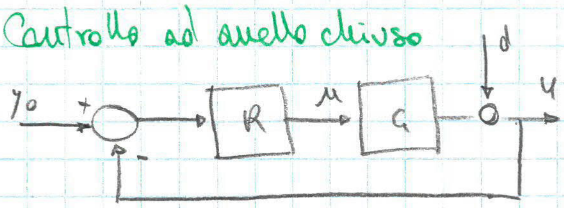
$G(s) = \frac{(10 \pm \Delta)(1+s)}{(2s+1)(1+0{,}1s)}$ R, considerando $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{y}{y_0} = RG = \frac{1\pm\Delta}{0{,}01\,s+1}$ ~ rimane il passa basso di prima

$Fdt^{ideale} = 1 \neq Fdt^{reale}$ anche a pulsazione nulla →



Abbiamo problemi anche per LF. L'anello aperto non conviene sempre

Controllo ad anello chiuso



(il blocco H è stato rimosso per semplicità della spiegaz)

$\frac{y}{y_0} = \frac{RG}{1+RG} = \frac{L}{1+L}$ ~ FdT ad anello $\frac{y}{d} = \frac{1}{1+L}$

Abbiamo un controllo sul disturbo, influenzandolo. Non succedeva con l'anello aperto.

1) Senza ~~conoscere~~ conoscere i disturbi, lo schema di controllo in anello chiuso permette di "gestirli"

Stabilità di sis controllo retroazionati

$1 + L(s) = 0 \rightarrow s_{1,2,3,\dots}$ ~ poli del sis anello chiuso

└ ordine di $L(s) \leq 2$

$\frac{N_L(s)}{D_L(s)} = 0 \Rightarrow D_L(s) + N_L(s) = 0$ bisogna azzerare il polinomio

Per essere realizzabile, grado $D_L(s)$ > grado $N_L(s)$ (sennò è improprio), l'unica sol dell'eq è con grado D_L == grado N_L, perciò $L(s)$ ~~deve essere~~ ha ordine D_L

Se $L > 2 \rightarrow s^3 + s^2 + s + 1 = 0$ ~ dovrei calcolare i diversi coefficienti con Routh (diventa un casino)

Se $L \leq 2$ $as^2 + bs + c = 0$ → ricavo a,b,c semplicemente perché nel caso di 2° ordine per stabilità asintotica a,b,c ~~...~~ hanno segno concorde e > 0

Per $L > 2$ ci sono altri criteri